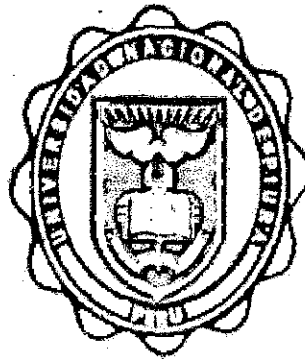


UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



“LA CONJETURA DE KAKEYA”

TESIS

**PARA OPTAR EL TÍTULO DE:
LICENCIADO EN MATEMÁTICA**

JOSÉ ELIHÚ ANASTACIO SANDOVAL

PIURA – PERÚ

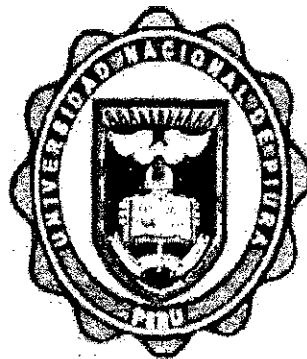
JUNIO – 2010



UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



“LA CONJETURA DE KAKEYA”

**TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO DE:
LICENCIADO EN MATEMÁTICA**

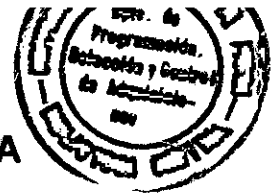
PRESENTADO POR:

Bchr. JOSÉ ELIHÚ ANASTACIO SANDOVAL

PIURA – PERÚ

JUNIO – 2010

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE PIURA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA**



"LA CONJETURA DE KAKEYA"

EJECUTOR



Bchr. José Elihú Anastacio Sandoval

PATROCINADOR



Lic. Julio López Castillo

JURADO DE TESIS



Lic. Ricardo Velesmoro León, M.Sc
PRESIDENTE



Lic. Luis Aguilar Ibáñez
SECRETARIO



Lic. María Hidalgo Tinedo
VOCAL



AGRADECIMIENTOS

Gracias en primer lugar a mi Dios Jehová por la vida, la familia y la compañera que me ha dado. No sería nada sin Él. A mis padres José y Rosa, quienes con mucho esmero y dedicación me han educado desde pequeño, por su cuidado en situaciones de salud críticas, por su esfuerzo por darme lo mejor y por todos esos detalles que me permiten aún seguir aquí y que llevarían muchas páginas si me pusiera a describirlos. A mis hermanas Libby y Clarissa por su cuidado y apoyo incondicionales, en todo sentido, no sólo en mi carrera universitaria sino también en mi vida diaria. A mis pajaritos Pinino y Minily por su compañía y por hacer más agradable mi vida. Aunque no son personas, me enseñan muy buenas lecciones. A mi perrito Bobby, que ya no está conmigo, por hacerme estudiar de una forma más diligente.

Finalmente, doy las gracias a mi mejor amiga Amalia por su amor, compañía, amistad, comprensión, abnegación y paciencia. Su apoyo ha sido fundamental en mi desarrollo como persona. Día a día ella me ha enseñado a ver la vida con otros ojos. Su comprensión y ánimo han sido fundamentales en la culminación de esta tesis. Le agradezco por hacerme sonreír incluso en los momentos más complicados, por soportarme y... muchas gracias por querer compartir el resto de su vida conmigo. A ella dedico este trabajo.

A Amalia Fernández

PRÓLOGO

La interrelación entre diversas áreas de la Matemática es bastante evidente en este tiempo. Existen problemas que reflejan muy bien esta interrelación. La conjetura de Kakeya es un buen representante de tales problemas pues en ella convergen áreas tan diversas como, por sólo mencionar algunas, combinatoria, análisis armónico, geometría fractal, aritmética combinatoria, teoría de números, teoría de campos finitos, geometría de incidencia, topología algebraica,... No obstante, su verdadera importancia son las consecuencias que tiene no sólo en esas áreas sino en otras que van desde la ecuación de la onda hasta la informática teórica. Hasta la fecha, dicha conjetura sólo ha sido demostrada para el caso del plano, quedando abierta su demostración para dimensiones superiores a la del plano. Su versión finita, la conjetura de Kakeya para campos finitos ya ha sido demostrada y su importancia ha quedado demostrada en las múltiples aplicaciones a la informática teórica, sobre todo en la construcción de mergers.

En este trabajo se expone los resultados parciales de la demostración de la conjetura en su versión Minkowsky, obtenidos de la aritmética combinatoria. Se prueba además dicha versión y la de Hausdorff para el caso del plano. Adicionalmente demuestra la conjetura de Kakeya para campos finitos a través de tres métodos: el polinomial, el de multiplicidades y el de multiplicidades extendido.

Mi agradecimiento al Lic. Julio López Castillo, la Lic. María Hidalgo Tinedo y al Lic. Ricardo Velesmoro León, M.Sc. por sus valiosas correcciones y sugerencias.

INDICE GENERAL

AGRADECIMIENTOS.....	v
DEDICATORIA.....	vii
PRÓLOGO.....	viii
ÍNDICE GENERAL.....	ix
LISTA DE SÍMBOLOS.....	xii
INTRODUCCIÓN	1

CAPÍTULO 1: PRELIMINARES

1.1	Conceptos Previos.....	10
1.1.1	Conceptos de la teoría de conjuntos y topología.....	10
1.1.2	Conceptos de álgebra.....	20
1.1.3	Conceptos de la teoría de la medida.....	25
1.1.4	Conceptos de la teoría de probabilidades	29
1.1.5	Combinatoria.....	31
1.1.6	Trocoides.....	33
1.2	Geometría Fractal	
1.2.1	Introducción.....	35
1.2.2	Medida y Dimensión de Hausdorff.....	36
1.2.3	Definiciones alternativas de dimensión:	
	La dimensión de Minkowsky.....	42
1.2.4	Proyecciones de Fractales.....	43
1.2.5	El método de Dualidad.....	45

1.3	Probabilidad Geométrica.....	49
1.4	Geometría Algebraica Combinatoria	
1.4.1	El Método Polinomial.....	52

CAPÍTULO 2: DESARROLLO HISTÓRICO DE LA CONJETURA

2.1	Introducción.....	56
2.2	El Problema de Besicovitch.....	57
2.3	Solución del problema de Besicovitch.....	60
2.4	El Problema de Kakeya.....	79
2.5	Solución del Problema de Kakeya.....	82

CAPITULO 3: LA CONJETURA DE KAKEYA

3.1	Introducción.....	116
3.2	La Conjetura de Kakeya.....	117
3.3	Demostración de la conjetura para el caso $n = 2$	140
3.4	La Conjetura de Kakeya para Campos Finitos.....	142
3.5	Demostración de la Conjetura de Kakeya para Campos Finitos	
3.5.1	Demostración usando el método polinomial.....	146
3.5.2	Derivadas de Hasse y multiplicidades.....	158
3.5.2.1	Derivada de Hasse para polinomios en una indeterminada.....	158
3.5.2.2	Derivada parcial multivariable de Hasse.....	160
3.5.2.3	Multiplicidades.....	164
3.5.3	Demostración usando multiplicidades.....	165
3.5.4	Demostración usando el método de multiplicidades extendido.....	167

3.6 Una aplicación de la CKCF.....	174
APÉNDICE.....	180
CONCLUSIONES.....	212
RECOMENDACIONES.....	213
BIBLIOGRAFÍA.....	214

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}, \emptyset$	Los naturales, enteros, racionales, irracionales, reales y el conjunto vacío.
$S^{n-1}, \mathbb{R}^n, \mathbb{F}_q$	La esfera n – dimensional, el espacio euclidiano n – dimensional y el campo finito con q elementos. $\mathbb{F}_q := \{0, \dots, q-1\}$
\mathbb{F}_q^n	Campo finito \mathbb{F}_q^n . Producto directo externo de n campos finitos \mathbb{F}_q . Espacio vectorial n – dimensional sobre \mathbb{F}_q .
$\llbracket \cdot \rrbracket, \equiv$	Mayor entero. Congruente a.
$\bigwedge_a b, \bigvee_a b$	Para todo a se cumple b y existe un a que cumple b .
$\cup, \cap, \setminus, \subset, \subseteq, =$	Unión, intersección, diferencia teórica (la diferencia usual), inclusión propia, inclusión e igualdad de conjuntos.
\bigcup, \bigcap	Unión e intersección generalizadas.
$ \cdot , \#, \ \cdot\ $	Medida de Lebesgue n – dimensional, cardinal de un conjunto y norma euclidiana.
$A^\circ, A', \bar{A}, \partial A, A^c$	Interior, conjunto derivado, clausura, frontera y complemento del conjunto A .
\times, \prod	Producto de conjuntos, grupos o espacios.
\otimes, \oplus, \cdot	El producto y la suma directa externa de grupos. Producto escalar de vectores.
$A + B, A - B$	La suma y la diferencia de conjuntos. $A + B := \{a + b a \in A \wedge b \in B\}$, $A - B := \{a - b a \in A \wedge b \in B\}$
$\sim, \approx, \ll, \simeq$	Semejante a, aproximadamente, mucho menor que, casi igual a.
$X \lesssim_\alpha Y$	Para una constante C dependiente de un parámetro α , $X \lesssim_\alpha Y := X \leq C Y$. Si C no depende de α se escribirá $X \lesssim Y$.

INTRODUCCIÓN

En el año 1917 el matemático japonés Soichi Kakeya propuso el siguiente problema conocido mundialmente como el *Problema de la aguja de Kakeya*:
¿Cuál es el área mínima que se requiere para rotar continuamente un segmento de línea de longitud 1 en el plano, de manera que después del giro vuelva a ocupar su posición original pero con los extremos invertidos?

De la pregunta anterior se ve claramente que el giro es de 180° e implícitamente se pide que tal conjunto con área mínima, conocido como *conjunto de Kakeya*, sea convexo. Este problema tendría una solución trivial a no ser por una restricción: EL ÁREA DEBE SER MÍNIMA...pero si no fuera por esto dejaría de ser interesante pues fácilmente giraríamos este segmento de línea unitario(al que llamaremos *aguja*) por su punto medio y así se barrería un área $\frac{\pi}{4}$ (que corresponde al círculo de radio $\frac{1}{2}$). Esta solución trivial puede ser mejorada dado que otros conjuntos proveen un área menor para dicha rotación de la aguja.

Históricamente, como ya se mencionó, el problema se planteó para conjuntos convexos. El matemático alemán J. Pál en su artículo *Ein*

Minimum problem fur Ovale publicado en el año 1921 probó que el triángulo equilátero de altura 1 es el conjunto de Kakeya que resuelve el problema para este tipo de conjuntos (el área correspondiente es $\frac{1}{\sqrt{3}}$). Sin embargo, para conjuntos en general el problema quedaba abierto. Se conjeturó que la hipocicloide de tres cuernos(o deltoide) era el conjunto de Kakeya que resolvía el problema para los conjuntos simplemente conexos (el área barrida es $\frac{\pi}{8} = 0.392699\dots$). Sin embargo, la respuesta era muy diferente.

En 1928, el matemático ruso Abram Besicovitch resolvió el problema cuando observó que, aún con la restricción de que sea simplemente conexo, se puede rotar una aguja en un conjunto con un área arbitrariamente pequeña. La prueba se basa en dos observaciones:

La primera es la respuesta a la siguiente cuestión:

“¿Cuál es el área mínima necesaria para pasar de una recta a otra paralela a ella?”

La respuesta: usar las llamadas conexiones de Pàl. El problema de usar conexiones de Pàl es que cuando más pequeña es el área utilizada para pasar de una recta a otra, más largas son las conexiones requeridas originando un problema de no acotación.

La segunda cuestión es el llamado *Problema de Besicovitch* el cual dice así:

“¿Existe un conjunto plano de medida cero que contiene un segmento de longitud 1 en cada dirección?”

La respuesta es afirmativa. Tal conjunto se conoce como *conjunto de Besicovitch*. La solución usa los llamados *árboles de Perron*, nombre que nos da una idea de la forma que tienen esos conjuntos: tienen "tronco" y "ramas" (ver fig. 2.3). Debe indicarse que la construcción original de Besicovitch no usaba árboles de Perron. Éstos fueron utilizados por el autor del mismo nombre cuando presentó una versión mejorada de la prueba de Besicovitch.

Combinando estas dos respuestas, la solución es fácil de prever: Construimos un árbol de Perron de área menor que $\frac{\epsilon}{2}$. Para pasar de una "rama" a otra, colocamos conexiones de Pál de manera que el área total de dichas conexiones sea menor de $\frac{\epsilon}{2}$. Por consiguiente, el área total es menor que ϵ . Los árboles de Perron se construyen a partir de un triángulo cualquiera. Por consiguiente, para completar el conjunto necesario para responder al problema de Kakeya, basta comenzar con un triángulo recto en uno de sus vértices, realizar la construcción anterior y repetirla cuatro veces girando 90° cada vez.

No obstante, hay un problema en la mencionada construcción: Cuanto más pequeño es el conjunto, aparece el problema de no acotación pues las conexiones de Pál utilizadas deben ser muy largas. Resolviendo este problema, en 1941, A. H. Van Alphen fue capaz de realizar la construcción en un círculo de radio $2 + \epsilon$, para cualquier $\epsilon > 0$ y en 1971 F. Cunningham la realizó en un círculo de radio 1 y además probó que no se puede hacer en un círculo de radio menor.

La construcción de Besicovitch muestra entonces que los conjuntos de Kakeya en \mathbb{R}^2 pueden tener un área arbitrariamente pequeña y, por consiguiente, con medida de Lebesgue igual a cero. Eliminado el problema de no acotación de los conjuntos de Kakeya, el interés se centró en los conjuntos de Besicovitch.

El hecho de tener área nula, no nos da una descripción completa de los conjuntos de Besicovitch. Como es bien sabido, no todos los conjuntos de medida cero tienen el mismo origen que estos conjuntos. Es necesario entonces emplear otra forma de medición. Recurriremos a la idea de asignar un número a un espacio: la dimensión del espacio. Esta nos dice cuánto espacio ocupa un conjunto en las cercanías de cada uno de sus puntos. Para tener una idea de esto, pensemos en la curva de Hilbert (ver fig. 1.8). Hallar su medida 1 – dimensional de Lebesgue, la cual es infinita, no nos dice mucho acerca de ella. No obstante su dimensión, la cual es 2, nos dice que se parece más a un plano que a una curva, es decir, en las cercanías de cada uno de sus puntos, dicha curva ocupa todo el espacio. En efecto, el gráfico de dicha curva llena el cuadrado unidad, se ve como una “mancha”. Esto precisa mejor nuestra comprensión de dicha curva.

Algo similar sucede con los conjuntos de Kakeya. Surge entonces la siguiente pregunta: ¿Qué puede decirse de la dimensión de Minkowsky de los conjuntos de Kakeya?. La conjetura que intenta responder esta cuestión se conoce como la *conjetura de Kakeya*, que afirma lo siguiente:

"Un conjunto de Besicovitch en \mathbb{R}^n tiene dimensión de Hausdorff (y de Minkowsky) igual a n ".

Para $n = 1$, la conjetura es trivial. Para $n = 2$ fue resuelta afirmativamente por R.O. Davies en su artículo titulado: *"Some remarks on the Kakeya problem"* publicado en 1971. Sin embargo, aún permanece sin demostrar para $n \geq 3$, aunque sí hay muchos resultados parciales.

En 1999, en su artículo *"Recent work connected with the Kakeya conjecture"*, Thomas Wolff propuso una analogía de la conjetura mucho más simple que ésta: *La Conjetura de Kakeya para Campos Finitos*. Esta variante es más fácil de analizar pues no tiene las complicaciones técnicas de las dimensiones empleadas en la conjetura euclidiana y ha sido completamente probada en 2008 por Zeev Dvir en su artículo *"On the size of Kakeya sets in finite fields"*.

Para hacer la analogía, se reemplaza \mathbb{R}^n por \mathbb{F}_q^n el cual es un espacio vectorial sobre el campo finito \mathbb{F}_q con $\# \mathbb{F}_q = q$ (Aquí $\#$ representa el cardinal de un conjunto) y se define a un conjunto de Besicovitch como el subconjunto de \mathbb{F}_q^n que contiene una línea en cada dirección (estas líneas son formalmente iguales a las usualmente conocidas. En particular, al menos en forma, su ecuación es idéntica a la ecuación vectorial de la recta).

A primera vista, el problema de Kakeya de girar una aguja en un conjunto plano pequeño y la respectiva solución de Besicovitch, aparecen como sólo un poco más de curiosidades matemáticas. Sin embargo, en las últimas tres

décadas se ha visto gradualmente que este tipo de problemas tiene conexión con muchos otros problemas en campos tan diversos como teoría de números, geometría combinatoria, aritmética combinatoria, generación de números aleatorios y recientemente con las ecuaciones de dispersión y de onda. Estas conexiones surgen cuando se toma en cuenta las consecuencias de la conjetura de Kakeya. Es más, las técnicas empleadas para demostrar los resultados parciales involucran una gran cantidad de áreas de la matemática. Incluso la versión más simple, la Conjetura de Kakeya para campos finitos, ha tenido una influencia significativa en el tema de los campos finitos, en especial en el fenómeno de suma-producto de estos campos, el cual tiene muchas aplicaciones en teoría de números y la ciencia de la computación. En este último campo, la prueba de Zeev Dvir es bastante similar a la encriptación/des encriptación de los algoritmos para los códigos de Reed – Solomón. El método de demostración de esta conjetura incluso ha sido usado para demostrar otras dos conjeturas en el espacio euclidiano.

El presente trabajo se desarrolla de la siguiente manera: En el capítulo 1, repasaremos los conceptos matemáticos necesarios para el estudio de la conjetura. Este capítulo es más un repaso que una explicación, por lo que se anima al lector a acudir a los libros especializados en el área para hallar las demostraciones que no se incluyen. Al respecto, recuerdo lo que leí en el libro *"El diablo de los números"* de Hans Magnus Enzensberger. Un fragmento del capítulo 11 relata una conversación entre Robert, el protagonista, y su diablo de los números:

"...Pero el viejo diablo de los números no perdió la calma.

-¿Has intentado alguna vez -preguntó- atravesar un caudaloso río?

-Ya me lo sé -gritó Robert-. ¡Me lo sé de sobra!

-No puedes nadar, porque la corriente te arrastraría enseguida. Pero en medio del río hay unas piedras grandes. ¿Qué haces entonces?

-Escojo unas piedras que estén tan cerca unas de otras como para poder saltar de una a otra. Si tengo suerte, cruzo. Si no, me quedo donde estaba.

-Exactamente igual ocurre con las pruebas. Pero, como llevamos ya un par de siglos haciendo todos los intentos posibles para cruzar el río, no hace falta que empieces por el principio. Ya hay en el río innumerables piedras en las que puedes confiar. Han sido probadas millones de veces. No son resbaladizas, no ceden, así que te garantizan un apoyo firme. Si tienes una idea nueva, una intuición, buscas a tu alrededor la piedra firme más cercana. Si puedes alcanzarla, vas saltando hasta llegar a la orilla. Si tienes cuidado, no te mojarás los pies..."

Esto ilustra el enfoque del capítulo 1. Como nos dice este diablo de los números, cuyo nombre por cierto es Teplotaxl, no hace falta empezar desde el principio, es decir, no hace falta demostrarlo todo. Esto nos llevaría páginas y páginas y el objetivo del trabajo se perdería. Utilizaremos las "piedras" del capítulo 1 para atravesar nuestros dos "ríos": la conjetura de Kakeya en el plano y la Conjetura de Kakeya para Campos Finitos (CKCF). Este es el objetivo de los preliminares.

En el capítulo 2, detallaremos el origen de la conjetura: El problema de Kakeya y el problema de Besicovitch. Presentaremos sus respectivas soluciones, así como la solución de Cunningham para el problema de no

acotación. Se incluye una gran cantidad de gráficos con el objetivo de hacer más comprensibles las demostraciones.

Finalmente, en el capítulo 3, luego de exponer los enunciados de la conjetura de Kakeya euclidiana y probar algunos resultados parciales (provenientes de la aritmética combinatoria sobre todo), mostramos que los conjuntos de Kakeya en el plano tienen dimensión de Hausdorff (y de Minkowsky) igual a 2 usando el método de dualidad propio de la geometría fractal, el cual da una solución corta y elegante a dicha cuestión. Esto lo haremos relacionando la dimensión de las proyecciones de fractales con la dimensión de los conjuntos de Kakeya en el plano. Así mismo, después de detallar la CKCF, se muestra su prueba usando el método polinomial, el método de multiplicidades y el método extendido de multiplicidades. La ventaja de un método sobre otro se verá en el capítulo 3. La idea básica es relacionar el cardinal de los conjuntos de Kakeya en un campo finito con polinomios cuyo grado se relacione con dicho cardinal y cuyos ceros en dichos conjuntos se anulen con multiplicidad 1 o más (ver sección 3.5). Para facilitar la comprensión, se ha implementado en el software científico Mathematica 6.0 los conceptos relevantes que se usan en la investigación.

El autor

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

1.1 Conceptos Previos

Este capítulo contiene un resumen de los conceptos matemáticos que desempeñan un papel importante en el propósito de esta investigación: la conjetura de Kakeya.

1.1.1 Conceptos de la Teoría de Conjuntos y topología

El punto de partida de la moderna teoría de conjuntos es admitir el concepto de *conjunto* como un concepto primitivo o no definido. En realidad, no necesitamos hacerlo. No obstante, esta palabra se usa más o menos en el sentido de agrupación o agregado en la que los elementos que se agrupan cumplen una determinada *relación de pertenencia*. Alguien puede preguntar, y con razón, qué entendemos por “relación de pertenencia”. No ahondaremos en estas cuestiones, las que caen dentro del ámbito de la lógica matemática. Sólo nos limitaremos a decir que postulamos la existencia de conjuntos en el mismo sentido que Zermelo, es decir, postulamos la existencia de

$$Y = \{X \in U | \phi(X)\}$$

$\phi(X)$ es lo que llamamos la relación de pertenencia y U se llama **conjunto universo**. No debemos pensar que esto es una definición de conjunto pues en realidad estamos "definiendo" un conjunto a partir de otro. Así pues, tomamos como conceptos primitivos a la noción de **conjunto** y al concepto expresado por la frase *es un elemento de*, la cual abreviaremos con el símbolo \in . Sólo agregaremos una terminología adicional: Si los elementos de un conjunto A son conjuntos, diremos que A es una **clase**. Por ejemplo, si consideramos el conjunto $\{1,2,3\}$ entonces su conjunto potencia es una clase.

En este apartado repasamos algunas nociones de la teoría de conjuntos y topología. Debemos recordar que todas las definiciones son del tipo si y sólo si (sii). Todos los conjuntos se suponen dentro de un conjunto universo U .

Definición 1.1 *Relación*

Una **relación** R entre los conjuntos A y B está definida por tres elementos: el conjunto A , el conjunto B y un subconjunto cualquiera $G \subseteq A \times B$; es decir, $R = \{A, B, G\}$. Si $A = B$, diremos que R es una **relación en A** .

Definición 1.2 *Relación De Orden Parcial*

Sea una relación \leq en un conjunto A que verifica los siguientes axiomas:

$$(01) \bigwedge_{a \in A} a \leq a$$

$$(02) \bigwedge_{a,b,c \in A} (a \leq b \wedge b \leq c) \Rightarrow a \leq c$$

$$(03) \bigwedge_{a,b \in A} (a \leq b \wedge b \leq a) \Rightarrow a = b$$

$A \leq$ se le conoce como **relación de orden parcial**. Con esta relación, A recibe el nombre de **conjunto parcialmente ordenado**.

Definición 1.3 Topología de un conjunto

Sea X un conjunto no vacío y \mathcal{T} una clase de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

(T1) X y \emptyset pertenecen a \mathcal{T}

(T2) La unión (finita o infinita) de conjuntos de \mathcal{T} pertenece a \mathcal{T} .

(T3) La intersección finita de conjuntos de \mathcal{T} pertenece a \mathcal{T} .

Decimos que \mathcal{T} es una **topología** de X . Los elementos de \mathcal{T} se llaman \mathcal{T} – **abiertos** o simplemente **abiertos** y el par (X, \mathcal{T}) se dice que es un **espacio topológico**. Cuando no hay riesgo de confusión en cuanto a la topología \mathcal{T} empleada, (X, \mathcal{T}) se abrevia por X .

Hasta que se indique lo contrario, X será considerado un espacio topológico.

Definición 1.4 Conjunto Cerrado

Un subconjunto A de X se dice \mathcal{T} – **cerrado** o simplemente **cerrado** si A^c es abierto.

Por consiguiente, la clase de los conjuntos abiertos en un espacio topológico y la clase de los conjuntos cerrados se determinan una a otra de manera unívoca. Por tanto, haciendo uso de las leyes de Morgan, podemos introducir en X una topología mediante la clase \mathcal{Q} de los conjuntos cerrados que satisface:

(Q1) X y \emptyset pertenecen a \mathcal{Q}

(Q2) La intersección (finita o infinita) de conjuntos de \mathcal{Q} pertenece a \mathcal{Q} .

(Q3) La unión finita de conjuntos de \mathcal{Q} pertenece a \mathcal{Q} .

Definición 1.5 Entorno de un punto

Un subconjunto $A \subset X$ es el **entorno** de un punto $x \in X$ si existe un abierto $V \in \mathcal{T}$ tal que $\{x\} \subset V \subset A$. Así pues podemos tomar a los abiertos como los entornos de un punto. Al conjunto $A \setminus \{x\}$ donde A es un entorno de x se le llama **entorno reducido** de x .

Definición 1.6 Punto de acumulación de un conjunto

Un punto $x \in X$ es un **punto de acumulación** o **punto límite** de $A \subset X$ si

$$\bigwedge_{\substack{G \subset X \\ G \text{ es entorno de } x}} (G \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$$

El conjunto de puntos de acumulación o **conjunto derivado** es denotado por A' .

Definición 1.7 Clausura de un conjunto

La **clausura**, **cierre** o **adherencia** de $A \subset X$, denotado por \overline{A} , es la intersección de todos los superconjuntos cerrados de A . De (Q2) vemos

que \bar{A} es cerrado y de esa manera la clausura puede ser pensada como el menor cerrado que contiene a A . Además, A es cerrado sii $A = \bar{A} = A' \cup A$. Un elemento de \bar{A} se denomina **punto de clausura** o **punto adherente** de A , es decir, $x \in X$ es un punto de clausura $A \subset X$ sii

$$\bigwedge_{\substack{G \subset X \\ G \text{ es entorno de } x}} G \cap A \neq \emptyset$$

Definición 1.8 Punto interior

El punto $x \in X$ es un **punto interior** de $A \subset X$ si existe un abierto G tal que $\{x\} \subset G \subset A$. El conjunto de los puntos interiores A° se conoce como el **interior** de A . Así pues tenemos que un conjunto A es abierto sii $A = A^\circ$ y A° puede ser pensado como el mayor subconjunto abierto de A . El **exterior** de $A \subset X$ es el interior de su complemento.

Definición 1.9 Frontera de un conjunto

La **frontera** de A , denotada por $\partial(A)$ es el conjunto de puntos que no pertenecen ni al interior ni al exterior de A .

La relación entre clausura, interior y complemento viene dada por la siguiente relación

$$\overline{A^c} = (A^\circ)^c \tag{1.1}$$

Definición 1.10 Conjunto denso

Un sub conjunto $A \subset X$ es **denso** en $B \subset X$ sii $B \subset \bar{A}$.

Como ejemplo tenemos que \mathbb{Q} e \mathbb{I} son densos en \mathbb{R} , ya que de (1.1) tenemos

$$\overline{\mathbb{Q}} = (\mathbb{I}^c)^c = \mathbb{R}$$

Definición 1.11 Recubrimiento de un conjunto

Sea $A \subset X$ y $\{E_i\}$ una clase de subconjuntos de X . Diremos que $\{E_i\}$ es un **recubrimiento** de A sii $A \subset \bigcup_i E_i$. Si los E_i son abiertos para cada i diremos que E_i es un **recubrimiento abierto**. Además, si alguna subclase finita de E_i también recubre a A , diremos que E_i contiene un **sub recubrimiento finito**.

Definición 1.12 Conjunto Compacto

Un subconjunto $A \subset X$ es **compacto** si todo recubrimiento de A tiene un sub recubrimiento finito. Un subconjunto cerrado de un conjunto compacto es también compacto.

Teorema 1.13 *Un espacio topológico X es compacto sii toda sucesión en X tiene una sub sucesión que converge a un punto de X .*

Definición 1.14 Función Continua

Sea (X, \mathcal{T}) y (Y, \mathcal{T}') dos espacios topológicos. La función $f: X \rightarrow Y$ es $\mathcal{T}-\mathcal{T}'$ **continua**, o simplemente **continua**, sii la imagen inversa de un abierto en Y es abierta en X . Para *localizar* el concepto de continuidad en un punto $a \in A$, basta tomar como abiertos a los que contengan al punto $f(a)$.

Definición 1.15 Espacios Homeomorfos

Dos espacios topológicos X y Y son **homeomorfos** o **topológicamente equivalentes** sii existe una función biyectiva $f: X \rightarrow Y$ tal que f y f^{-1} sean continuas. En tal caso f se llama **homeomorfismo**.

Definición 1.16 Topología Relativa

Sea $A \subset X$, donde (X, \mathcal{T}) es un espacio topológico. La clase $\mathcal{T}_A := \{A \cap U \mid U \in \mathcal{T}\}$ es una topología de A que se conoce como la **topología relativa** de A o la **relativización** de \mathcal{T} a A .

Definición 1.17 Trayectoria

Sea $I = [0, 1]$. Una **trayectoria** de un punto a hacia un punto b en un espacio topológico X es una función continua $f: I \rightarrow X$ tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$. El punto a se llama **punto inicial** de la trayectoria y b es el **punto final de la trayectoria**. Si $f(0) = f(1) = a$ se tiene lo que se conoce como **trayectoria cerrada**.

Definición 1.18 Conexidad por arcos

Diremos que $E \subset X$ es **conexo por arcos** sii para cada par de puntos $a, b \in E$ existe una trayectoria con extremos en a y b que está contenida en E .

Definición 1.19 Conjunto Simplemente Conexa

Sea $F \subset X$, F es **simplemente conexa** sii es conexo por arcos y toda trayectoria cerrada en F es contráctil en un punto, es decir, se puede deformar a un punto.

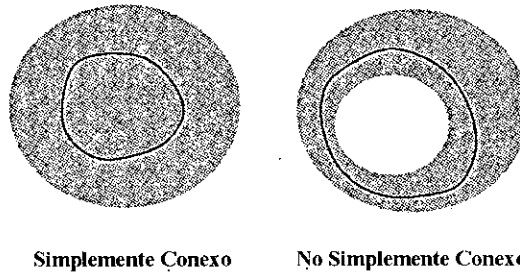


Fig. 1.1 Ilustración del concepto de conjunto simplemente conexo

Los siguientes dos lemas nos muestra la relación entre la unión e intersección de conjuntos simplemente conexos:

Lema 1.20 *Si A y B son simplemente conexos y $A \cap B$ es conexo por arcos y no vacío, entonces $A \cup B$ es simplemente conexo.*

Lema 1.21 *Supongamos que:*

- (i) A_1, \dots, A_n son simplemente conexos;
- (ii) $A_i \cap A_j$ es conexo por arcos para todo i, j ;
- (iii) $A_i \cap A_j \cap A_k$ es no vacío para todo i, j, k ;

Entonces $\bigcup_i A_i$ es simplemente conexo

Definición 1.22 Métrica

En un conjunto X consideramos una aplicación $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface:

$$(D1) \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$(D2) \quad \bigwedge_{x, y, z \in X} d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$$

Decimos entonces que la aplicación d es una **métrica** en X . Se dice también que X es un **espacio métrico**; $d(x, y)$ es la **distancia** entre x e y . De estas dos propiedades se deducen la simetría y no negatividad de la métrica ¹.

Definición 1.23 Diámetro de un Conjunto

Si $S \subset X$, donde X es un espacio métrico con métrica d , denotaremos por $d(S)$ al **diámetro** de S definido como:

$$d(S) := \sup\{d(x, y) | x, y \in S\}$$

Definición 1.24 Conjunto Acotado

Diremos que S es **acotado** si $d(S) < \infty$.

Definición 1.25 Bola cerrada y abierta

Sea X un espacio métrico. La **bola cerrada** con centro en x y radio δ se define como

$$B(x, \delta) = \{y \in X | d(x, y) \leq \delta\}$$

La **bola abierta** o **disco** con centro en x y radio δ se define como:

$$D(x, \delta) = \{y \in X | d(x, y) < \delta\}$$

Definición 1.26 δ – vecindad

Sea (X, d) un espacio métrico. La δ – **vecindad** de un subconjunto A , denotada por A_δ , se define como

$$A_\delta := \left\{ x \in X \left| \bigvee_{y \in A} d(x, y) \leq \delta \right. \right\}$$

¹ En esta investigación trabajaremos en el espacio euclidiano n – dimensional \mathbb{R}^n con la métrica usual

Definición 1.27 Subconjunto δ - separado

Sea $E \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que $S \subset E$ es un subconjunto δ - **separado** sii

$$\bigwedge_{\substack{x,y \in S \\ x \neq y}} d(x,y) \geq \delta$$

Definición 1.28 δ - entropía

La δ - **entropía** de E es el cardinal del subconjunto maximal δ - separado de E , es decir,

$$\mathcal{E}_\delta(E) := \max \left\{ \# S \mid \bigwedge_{x,y \in S} d(x,y) > \delta \vee x = y \right\}$$

La δ - entropía es comparable con el mínimo número de δ - discos requeridos para cubrir E . Definimos

$$K_\delta(E) := \min \left\{ k \in \mathbb{Z}^+ \mid \bigvee_{x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n} E \subset \bigcup_{i=1}^k D(x_i, \delta) \right\}$$

Tenemos entonces que

$$K_\delta(E) \leq \mathcal{E}_\delta(E) \tag{1.2}$$

Teorema 1.29 Propiedad de los intervalos en encaje

Sea $I_1 = [a_1, b_1], I_2 = [a_2, b_2], \dots$, una sucesión de intervalos de \mathbb{R} , compactos y en encaje, es decir, $I_1 \supset I_2 \supset \dots$. Entonces, existe al menos un punto común a todos los intervalos, esto es,

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} I_i \neq \emptyset$$

1.1.2 Conceptos de Álgebra

En esta sub sección se dan unas pocas definiciones de álgebra elemental. La terminología es la usual.

Definición 1.30 Grupo

Un **grupo** es un par $(G, *)$ donde G es un conjunto no vacío y $*$, llamada la **operación de grupo**, es una función $*$: $G \times G \rightarrow G$ que satisface

$$(G1) \quad \bigwedge_{x,y,z \in G} (x * y) * z = x * (y * z)$$

$$(G2) \quad \bigvee_{e \in G} \bigwedge_{x \in G} x * e = e * x = x$$

$$(G3) \quad \bigwedge_{x \in G} \bigvee_{x' \in G} x * x' = x' * x = e$$

Si G es finito, G es un **grupo finito**. En este contexto, el cardinal de G se conoce como el **orden** de G . Lo seguiremos representando como antes.

Definición 1.31 Grupo Abeliano

Un grupo G es **abeliano** si $*$ es conmutativo. En tal caso, sólo por convención, la notación $*$ se cambia por $+$ y al elemento neutro e se le representa por 0 .

Sean los grupos G_1, \dots, G_n . Considerando a los G_i como conjuntos, podemos formar el conjunto producto $\prod_{i=1}^n G_i$. El siguiente teorema da la forma en que se puede hacer grupo a este conjunto producto

Teorema 1.32 Sean los grupos G_1, \dots, G_n . Para (a_1, \dots, a_n) y (b_1, \dots, b_n) en $\prod_{i=1}^n G_i$ definimos $\otimes: \prod_{i=1}^n G_i \times \prod_{i=1}^n G_i \rightarrow \prod_{i=1}^n G_i$ como

$$(a_1, \dots, a_n) \otimes (b_1, \dots, b_n) := (a_1 b_1, \dots, a_n b_n)$$

Entonces $\prod_{i=1}^n G_i$ es un grupo, el **producto directo externo** de los grupos G_i , bajo la operación binaria \otimes .

Si cada uno de los G_i es abeliano, se utiliza la notación $\oplus_{i=1}^n G_i$ y nos referimos a $\prod_{i=1}^n G_i$ como la **suma directa externa de los grupos** G_i . Si cada G_i es conmutativo, $\prod_{i=1}^n G_i$ también lo será. Si $\# G_i = r_i$ entonces

$$\# \prod_{i=1}^n G_i = r_1 \dots r_n \quad (1.3)$$

Definición 1.33 Anillo

Un **anillo** es un triplete $(R, *, ')$ donde $*, ': R \times R \rightarrow R$ satisfacen los siguientes axiomas:

(A1) $(R, *)$ es un grupo abeliano

(A2) $'$ es asociativa

$$(A3) \bigwedge_{x,y,z \in R} x * (y * 'z) = (x * y) * '(x * z)$$

Debido a (A1), a $*$ se le llama comúnmente suma y se denota por $+$ mientras que a $'$ se le llama multiplicación.

Definición 1.34 Anillos Especiales

Un anillo R en donde la multiplicación es conmutativa se le denomina **anillo conmutativo**. Si R tiene una identidad multiplicativa 1 tal que

$\bigwedge_{x \in R} 1 * x = x * 1 = x$, entonces es un **anillo con unitario**. Una identidad multiplicativa en un anillo es un **elemento unitario** o **unitario**. Un **inverso multiplicativo** de un elemento a en un anillo R con unitario 1 es un elemento $a^{-1} \in R$ tal que $a^{-1} * a = a * a^{-1} = 1$. Si a tiene inverso multiplicativo se dice que es una **unidad** de R . Si todo elemento distinto de 0 en R es una unidad, entonces se dice que R es un **semi campo** o **anillo con división**.

Definición 1.35 Campo

Un **campo** es un anillo conmutativo con división². Un $E \subset F$ es un **sub campo** del campo F si es en sí mismo un campo.

Definición 1.36 Homomorfismo

Sean $(R, +, \cdot)$ y (R', \oplus, \odot) dos anillos. Una función $\psi: R \rightarrow R'$ es un **homomorfismo** sii

$$(Ho1) \quad \bigwedge_{r, r' \in R} \psi(r + r') = \psi(r) \oplus \psi(r')$$

$$(Ho2) \quad \bigwedge_{r, r' \in R} \psi(r \cdot r') = \psi(r) \odot \psi(r')$$

Igual que antes, si definimos la suma y multiplicación como en el teorema 1.32, entonces el producto directo $\prod_{i=1}^n R_i$ de los anillos R_1, \dots, R_n es también un anillo. Si cada R_i es un campo, entonces $\prod_{i=1}^n R_i$ también es un campo. El significado de $\bigoplus_{i=1}^n R_i$ es el mismo de antes.

² Los campos usados en este trabajo son los **campos finitos**. En particular el campo \mathbb{F}_q^n el cual es el producto directo de n campos $\mathbb{F}_q := \{0, 1, \dots, q-1\}$. De (1.3), vemos que $\# \mathbb{F}_q^n = q^n$.

Definición 1.37 *Espacio Vectorial*

Decimos entonces que X es un **espacio vectorial** sobre el campo \mathbb{F} y lo denotamos por $(X, +, *, \mathbb{F})$ si en X se da una aplicación llamada **adición** $+: X \times X \rightarrow X$ con las propiedades conmutativa, asociativa, existencia del elemento neutro y del elemento inverso; y una aplicación $*: \mathbb{F} \times X \rightarrow X$, llamada **multiplicación por elementos de \mathbb{F}** que verifica los axiomas distributivos y la existencia del elemento neutro de la multiplicación ³.

Definición 1.38

Sea X un espacio vectorial sobre \mathbb{F} y además $S, T \subset X$ y $M \subset \mathbb{F}$. Definimos

$$S + T := \{x + y \in X | x \in S \wedge y \in T\}$$

$$MS := \{\alpha x \in X | \alpha \in M \wedge x \in S\}$$

Si $M = \{\alpha\}$ escribimos αS en vez de MS .

Definición 1.39 *Polinomio*

Sea R un anillo. Un **polinomio** $f(x)$ con coeficientes en el anillo R es una suma formal infinita

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

Donde $a_j \in R$ y $a_i = 0$ para todos, excepto un número finito de valores de i . A x se le llama **indeterminada**. Las a_j son los **coeficientes** de $f(x)$.

³ Se sigue entonces que el campo finito \mathbb{F}_q^n puede considerarse como un espacio vectorial sobre \mathbb{F} , con la suma y multiplicación, por escalares de \mathbb{F}_q , término a término.

Definición 1.40 Grado de un polinomio

Con la notación de la definición 1.39, si para alguna $i > 0$ se cumple que $a_i \neq 0$, el mayor de dichos valores de i es el **grado** de $f(x)$. Si no existe dicha $i > 0$, entonces $f(x)$ es de **grado cero**.

Definición 1.41 Polinomio Constante

Un elemento de R es un **polinomio constante**.

La suma y multiplicación polinomial se realizan de la manera usual. Así, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.42 *El conjunto $R[x]$ de todos los polinomios en una indeterminada x con coeficientes en un anillo R , es un anillo bajo la suma y multiplicación polinomial. Si R es conmutativo, también $R[x]$ lo es y si R tiene unitario 1 , entonces 1 también es unitario en $R[x]$. $R[x]$ es el anillo de polinomios en una indeterminada.*

Observación 1.1

Este concepto puede extenderse a más de una indeterminada. Si R es un anillo y x e y son indeterminadas, podemos formar el anillo $(R[x])[y]$, es decir el anillo de polinomios en y cuyos coeficientes son polinomios en x . Se demuestra que $(R[x])[y]$ es isomorfo a $(R[y])[x]$, esto es, cada polinomio en y puede reescribirse como un polinomio en x . Por consiguiente podemos definir el anillo $R[x, y]$ como el **anillo de polinomios en dos indeterminadas**. Análogamente definimos el anillo $R[x_1, \dots, x_n]$ como el **anillo de polinomios en n indeterminadas x_i con**

coeficientes en R . Si R es un campo $R[x]$ no es un campo pero sí es un dominio entero.

Definición 1.43 El homomorfismo de Evaluación

Sea E un sub campo de un campo F y $\alpha \in F$. Sea $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ un elemento de $F[x]$. La transformación $\psi_\alpha: F[x] \rightarrow E$ definida por

$$\psi_\alpha(f(x)) = a_0 + a_1\alpha + \dots + a_n\alpha^n$$

es un homomorfismo de $F[x]$ en E , llamado el **homomorfismo de evaluación** en α .

Definición 1.44 Cero de un polinomio

En la notación anterior, si $\psi_\alpha(f(x)) = 0$, diremos que α es un **cero** de $f(x)$.

1.1.3 Conceptos de la Teoría de la Medida

Esta sub sección contiene un resumen de algunos tópicos de la teoría de la medida. La utilidad de estos conceptos para nuestro propósito radica en que sobre ellos se definen las nociones de dimensión que utilizaremos.

Definición 1.45 σ - álgebra

Sea X un conjunto. Una clase no vacía \mathfrak{L} de subconjuntos de X es una **σ - álgebra** si y sólo si:

$$(\sigma 1) \bigcap_{E \in \mathfrak{L}} X \setminus E \in \mathfrak{L}$$

$$(\sigma 2) \bigwedge_{\substack{E_j \in \mathfrak{L} \\ j \in \mathbb{N}}} \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathfrak{L}$$

Usando un poco de teoría de conjuntos, se demuestra que

$$(\sigma 3) \bigwedge_{\substack{E_j \in \mathfrak{L} \\ j \in \mathbb{N}}} \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathfrak{L}$$

$$(\sigma 4) \bigwedge_{E, F \in \mathfrak{L}} E \setminus F \in \mathfrak{L}$$

$$(\sigma 5) X, \emptyset \in \mathfrak{L}$$

Definición 1.46 σ - álgebra generada

Sea \mathfrak{C} una clase de subconjuntos de X . Entonces la σ - álgebra generada por \mathfrak{C} , denotada por $\mathfrak{L}(\mathfrak{C})$, es la intersección de todas las σ - álgebras que contienen a \mathfrak{C} . Se demuestra que $\mathfrak{L}(\mathfrak{C})$ es también una σ - álgebra y la podemos pensar como la más pequeña σ - álgebra que contiene a \mathfrak{C} .

Definición 1.47 Medida

Una **medida** μ es una función $\mu : \mathfrak{L} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ que satisface:

$$(M1) \mu(\emptyset) \equiv 0$$

$$(M2) \bigwedge_{\substack{\{E_j\} \text{ disjunta} \\ E_j \in \mathfrak{L}}} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$$

De (M2) se sigue μ es una función creciente de conjuntos, es decir, si $E \subset F$ con $E, F \in \mathfrak{L}$ entonces $\mu(E) \leq \mu(F)$. Una terna (X, σ, μ) en la que X

es un conjunto, σ una σ – álgebra contenida en $\mathcal{P}(X)$ y μ una medida sobre σ se llama **espacio de medida**.

Definición 1.48 Medida Exterior

Introducimos ahora las medidas exteriores las cuales son esencialmente medidas con (M2) debilitado a la sub aditividad. Formalmente, una **medida exterior** ν sobre un conjunto X es una función $\nu : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ que satisface:

$$(ME1) \nu(\emptyset) = 0$$

$$(ME2) A \subset A' \Rightarrow \nu(A) \leq \nu(A')$$

$$(ME3) \nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j)$$

Las medidas exteriores son muy usadas dado que por definición siempre hay una σ – álgebra de subconjuntos sobre los cuales se comportan como medidas.

Definición 1.49 Conjuntos de Borel

Sea (X, d) un espacio métrico. Los conjuntos pertenecientes a la σ – álgebra generada por los subconjuntos cerrados de X son llamados los **conjuntos de Borel** del espacio ⁴. Así, los conjuntos de Borel constituyen la más pequeña colección de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:

⁴ Trabajaremos con el espacio de medida $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, |\cdot|)$, donde \mathcal{B} son los conjuntos borelianos de \mathbb{R}^n y $|\cdot|$ es la medida n – dimensional de Lebesgue

$$(B1) \bigwedge_{\substack{A=A^* \\ B=\overline{B}}} A, B \text{ son de Borel}$$

$$(B2) E_j \text{ es de Borel} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j, \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \text{ son de Borel}$$

Teorema 1.50 Sean (X, σ, μ) y (X', σ', μ') dos espacios de medida. Existe sobre $X \times X'$ una medida ν tal que

$$\bigwedge_{\substack{A \in \sigma \\ A' \in \sigma'}} \nu(A \times A') = \mu(A)\mu'(A')$$

Definición 1.51 Paralelepípedo coordinado

Sean $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \dots, n$. Un **paralelepípedo coordinado** es el conjunto $A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | a_i \leq x_i \leq b_i\}$. El **volumen** n -**dimensional** de A es dado por

$$\text{vol}^n(A) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$$

De acuerdo a esto, vol^1 es longitud, vol^2 es área y vol^3 es el volumen usual de la geometría del espacio.

Definición 1.52 Medida n -dimensional de Lebesgue

La n -**dimensional medida de Lebesgue** de $A \subset \mathbb{R}^n$, $|A|$, se define como

$$|A| = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}^n(A_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los cubrimientos de A conformados por los paralelepípedos coordenados A_i .

De lo anterior, si A es un paralelepípedo coordenado, $|A| = \text{vol}^n(A)$. Se puede pensar a $| \cdot |$ como la extensión del volumen n – dimensional a una clase más grande de conjuntos. Cuando se utilice el símbolo $| \cdot |$, el contexto indicará en qué valor de n se está trabajando.

1.1.4 Conceptos de la Teoría de Probabilidades

La teoría de la probabilidad parte de la idea de *experimento*, esto es, la acción cuyo resultado es, para propósitos prácticos, no determinado de antemano.

Definición 1.53 *Espacio de Probabilidad*

El *espacio de probabilidad* de un experimento es el conjunto de todos los resultados posibles de éste⁵.

Definición 1.54 *Evento*

Un subconjunto del espacio muestral se llama *evento*. Un *evento elemental* es el evento que consta de un solo elemento. Dicho elemento recibe el nombre de *punto muestral*.

Definición 1.55 *Probabilidad de un Evento*

Si en un experimento con n intentos un evento ocurre m veces, entonces la *probabilidad* $Pr(E)$ de realizar un evento E se define como

⁵ Se utilizarán los espacios de probabilidad finitos.

$$Pr(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}$$

Por definición, $0 \leq Pr(E) \leq 1$.

Observación 1.2

Para dos eventos E y F en un espacio muestral Ω , denotaremos mediante $E \wedge F$ y $E \vee F$ a $E \cap F$ y $E \cup F$ respectivamente.

Definición 1.56 Eventos Mutuamente Excluyentes

Se dice que dos eventos E y F son *mutuamente excluyentes* si $Pr(E \wedge F) = 0$.

De lo anterior, definimos

$$Pr(E \vee F) := \begin{cases} Pr(E) + Pr(F), & \text{si } Pr(E \wedge F) = 0 \\ Pr(E) + Pr(F) - Pr(E \wedge F) & \text{, en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Definición 1.57 Eventos independientes

Dos eventos E y F son *independientes* si $Pr(E \wedge F) = Pr(E) \cdot Pr(F)$.

Definición 1.58 Probabilidad Condicional

Dados dos eventos E y F , con $Pr(F) > 0$, la *probabilidad condicional* de E dado F , la cual denotaremos mediante $Pr(E|F)$, se define como:

$$Pr(E|F) := \frac{Pr(E \wedge F)}{Pr(F)}$$

Así, si $E \subset F$ entonces $Pr(E|F) = \frac{Pr(E)}{Pr(F)}$. Además, E y F son eventos independientes si y sólo si $Pr(E|F) = Pr(E)$.

Teorema 1.59 Si A y B son dos eventos, entonces

$$\Pr(B) = \Pr(B \wedge A) + \Pr(B \wedge A^c)$$

Definición 1.60 Espacio de Probabilidad Equiprobable

Un **espacio de probabilidad equiprobable** o **uniforme** es un espacio de probabilidad finito en el cual cada punto muestral tiene la misma probabilidad.

Observación 1.3

La expresión “*al azar*” se usará solamente respecto a un espacio equiprobable; es decir, la expresión “*escoger un punto al azar de un conjunto S* ” significa que S es un espacio equiprobable.

1.1.5 Combinatoria

La teoría combinatoria es una rama de las matemáticas que estudia las posibles agrupaciones de objetos tomados de un conjunto dado.

Definición 1.61 Coeficiente Binomial

Para $n \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ definimos el **coeficiente binomial** como

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!}$$

Lema 1.62 El número de n - tuplas de enteros no negativos a_1, \dots, a_n tal que $a_1 + \dots + a_n = k$ es

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Demostración

Consideremos la siguiente correspondencia entre las tuplas del lema y la manera de marcar cuadrados. Pongamos $n + k - 1$ cuadrados en una fila, y ocupemos $n - 1$ de esos cuadrados con una marca. Sea a_1 el número de cuadrados anteriores a la primera marca; a_i el número de cuadrados entre la $i - 1$ -ésima e i -ésima marca, para $2 \leq i \leq n - 1$; y a_n el número de cuadrados después de la n -ésima marca. Entonces $a_i \geq 0$ y

$$\sum_{i=1}^n a_i = (n + k - 1) - (n - 1) = k$$

Recíprocamente, dado a_1, \dots, a_n , ponemos una marca después de a_1 cuadrados, otra marca después de a_2 espacios más, ..., otra después de $n - 1$ cuadrados más de manera que sobran a_n cuadrados.

Para entender esta parte, tomemos $n = 4$ y $k = 5$. Consideremos el siguiente patrón de cuadrados y marcas.



Fig. 1.2 Patrón de cuadrados y marcas para $n = 4$ y $k = 5$

Esto corresponde a $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$ y $a_4 = 1$. Recíprocamente, la 4-tupla $(0, 3, 0, 2)$ corresponde al siguiente patrón:



Fig. 1.3 Patrón de cuadrados y marcas correspondientes a $(0, 3, 0, 2)$

Establecida esta correspondencia basta observar que hay $\binom{n+k-1}{n-1}$ maneras de elegir la posición de las marcas.

Pero

$$\binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

■

1.1.6 Trocoides

Definición 1.63 Trocoides

Las **trocoides** son curvas obtenidas a través de puntos asociados a una circunferencia que rueda sobre o dentro de otra.

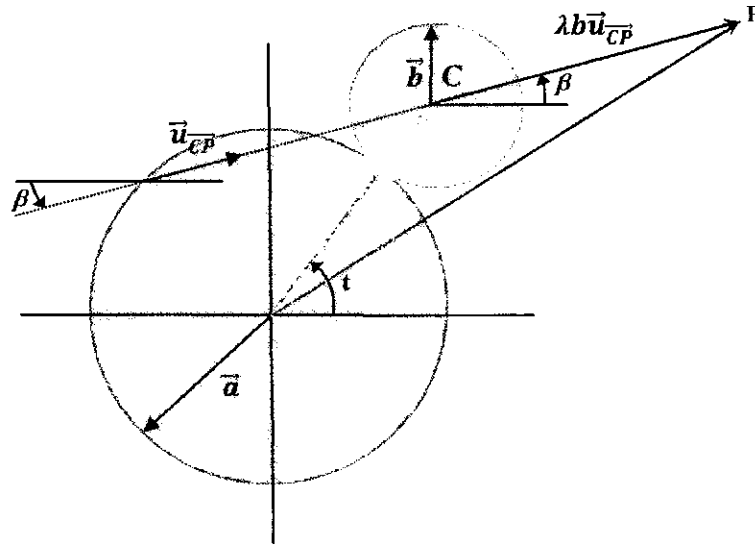


Fig. 1.4 Deducción de la ecuación de una trocoide

La simbología se ve en la figura 1.4. Las coordenadas del punto P vienen dadas por:

$$P = \left((a+b)\cos(t) - \lambda b \cos\left(\frac{a+b}{b}t\right), (a+b)\sin(t) - \lambda b \sin\left(\frac{a+b}{b}t\right) \right)$$

Identificando los puntos del plano con los números complejos, las coordenadas del punto genérico P vienen dadas por

$$P = (a + b)e^{it} - \lambda b e^{it \frac{a+b}{b}} \quad (1.4)$$

donde $\|\vec{a}\| = a$ y $\|\vec{b}\| = b$. Esta es la **ecuación general de las trocoides**.

El signo de b indica si la circunferencia pequeña rueda en el exterior de la otra ($b > 0$) (**epitrocoide**), o dentro de ella ($b < 0$) (**hipotrocoide**, en este caso reemplazamos b por $-b$). Cuando $\lambda = 1$, la epitrocoide se llama **epicicloide** y la hipotrocoide recibe el nombre de **hipocicloide**.

Definición 1.64 Deltoide

Cuando $a = 3b$, la hipocicloide obtenida se conoce como **deltoide** cuya ecuación (no olvidar sustituir b por $-b$ en (1.4)) es:

$$P = 2be^{it} + be^{2ti}$$

, es decir,

$$P(t) = (2b\cos(t) + b\cos(2t), 2b\sin(t) + b\sin(2t))$$

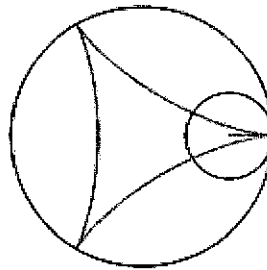


Fig. 1.5 Deltoide

La deltoide tiene una propiedad peculiar: el segmento de recta tangente comprendido entre cualesquiera dos puntos P y Q de la deltoide tiene longitud constante e igual a $\frac{4}{3}a = 4b$.

1.2 Geometría Fractal

1.2.1 Introducción

La geometría fractal surgió de la necesidad de describir apropiadamente las irregularidades de la naturaleza. Como dice Mandelbrot en su libro *The Fractal Geometry of Nature*:

“...las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son circulares, la corteza de un árbol no es lisa...”

Dos son las características básicas que caracterizan a los objetos fractales: La *autosemejanza* y la *dimensión fraccionaria*. Un ejemplo de fractal autosemejante es el triángulo de Sierpinski (fig. 1.6).

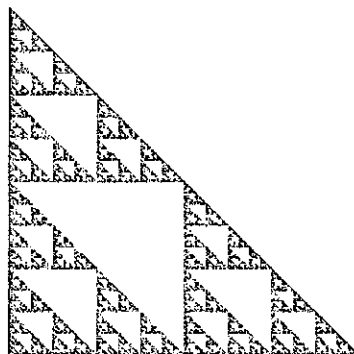


Fig. 1.6 Triángulo de Sierpinski

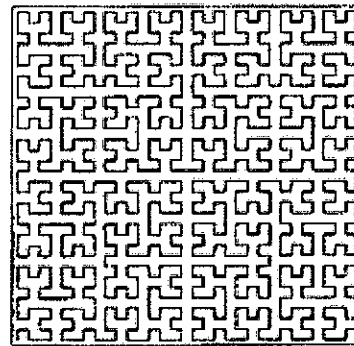


Fig. 1.7 Curva de Hilbert

Intuitivamente hablando, un fractal es auto semejante si su aspecto es el mismo independientemente de la escala en que lo observemos. Sin embargo, la auto semejanza no basta para caracterizar los objetos fractales pues, por ejemplo, el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ es auto semejante pero no es fractal. Como ya se mencionó, el otro requisito es la dimensión fraccionaria. Todos nosotros tenemos una idea intuitiva de ese concepto,

por ejemplo, que un punto tiene dimensión cero; una recta, dimensión 1; un cuadrado, dimensión 2;... Sin embargo, consideremos la curva de Hilbert (Figura 1.7). Por ser curva, esperaríamos que su dimensión sea 1. No obstante, se demuestra que la curva de Hilbert llena el cuadrado unidad, por lo que se nos presenta como de dimensión 2.

Para resolver esta y otras cuestiones, se han ideado varias formas de asignar una dimensión a los fractales. La más antigua de todas es la dimensión de Hausdorff. Sin embargo, para las aplicaciones no es tan fácil de manipular. Para este propósito, la que mayor uso tiene es la dimensión de Minkowsky. Precisamente, sobre estas dimensiones se formula la conjetura que vamos a estudiar.

1.2.2 Medida y Dimensión de Hausdorff

Sea $E \subset \mathbb{R}^n$, $\{U_i\}$ un δ - cubrimiento de E y $s > 0$. Para $0 < \delta \leq 1$ definimos

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf_{U_\delta} \sum_{i=1}^{\infty} r_i^s \quad (1.5)$$

Donde U_δ es un δ - cubrimiento contable de E mediante discos $D(x_i, r_i)$ con $x_i \in E$. Para $\delta_1 < \delta_2$ es obvio que $U_{\delta_1} \subset U_{\delta_2}$ y por consiguiente $\mathcal{H}_{\delta_2}^s \leq \mathcal{H}_{\delta_1}^s$.

Un resultado inmediato es que \mathcal{H}_δ^s es una medida exterior sobre \mathbb{R}^n .

Definición 1.65 Medida de Hausdorff

Obtenemos la **medida exterior de Hausdorff** de E con parámetro s cuando $\delta \rightarrow 0$. Así

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(E)$$

Teorema 1.66

$$(1) \bigwedge_{\substack{s_1 > s_2 \\ \delta < 1}} \mathcal{H}_\delta^{s_1} \leq \mathcal{H}_\delta^{s_2}$$

$$(2) \mathcal{H}_1^s(E) = 0 \Rightarrow \mathcal{H}^s(E) = 0$$

$$(3) \bigwedge_{s > n} \bigwedge_{E \subset \mathbb{R}^n} \mathcal{H}^s(E) = 0$$

Demostración

La parte (1) se sigue directamente de la definición de \mathcal{H}_δ^s puesto que para $r_i < 1$ se cumple que $r_i^{s_1} \leq r_i^{s_2}$.

Para la parte (2), $\mathcal{H}_1^s(E) < \delta$ implica que existe un $\delta^{\frac{1}{s}}$ – cubrimiento de E y por consiguiente

$$\bigwedge_{\delta > 0} \mathcal{H}_{\delta^{\frac{1}{s}}}^s(E) < \delta$$

Por lo tanto $\mathcal{H}_\delta^s(E) < \delta'^s$ y $\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta'^s = 0$.

Finalmente para (3) observamos que si $s > n$ entonces podemos cubrir a \mathbb{R}^n mediante discos $D_{r_i}(x_i)$ con $\sum_i r_i^s$ arbitrariamente pequeña. Para esto, fijemos un $\epsilon > 0$. Cada disco unitario en \mathbb{R}^n puede ser cubierto con $C2^{kn}$ discos de radio $r_i = 2^{-k}$, donde $k > 0$ y C es una constante. Por consiguiente, para el disco unitario

$$\bigvee_{k>0} \sum_i r_i^s = C 2^{kn-ks} < \epsilon$$

Dado que existe un cubrimiento contable de \mathbb{R}^n por discos unitarios, se tiene la parte (3). ■

El límite de la definición 1.65 existe dado que cuando δ decrece, la clase de cubrimientos permisibles de E es reducida por lo que $\mathcal{H}_\delta^s(E)$ se incrementa. Claramente se ve además que $\mathcal{H}^s(E)$ es una medida exterior sobre \mathbb{R}^n . La medida de Hausdorff generaliza las ideas familiares de longitud, área, volumen,... Si E es un subconjunto de Borel de \mathbb{R}^n , entonces

$$\mathcal{H}^n(E) = c_n^{-1} \text{vol}^n(E) \quad (1.6)$$

donde c_n es el volumen de una bola n - dimensional de diámetro 1.

Teorema 1.67 Propiedad de Escala

Sea S una transformación de similaridad de factor de escala $\lambda > 0$. Si $E \subset \mathbb{R}^n$ entonces

$$\mathcal{H}^s(S(E)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(E)$$

Veamos el efecto que tienen otras transformaciones sobre la medida de Hausdorff.

Teorema 1.68 Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ y $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ un mapeo tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$$

para constantes $c > 0$ y $\alpha > 0$. Entonces

$$\bigwedge_{s>0} \mathcal{H}^{s/\alpha}(f(E)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(E) \quad (1.7)$$

Consideremos ahora el comportamiento de \mathcal{H}^s cuando varía s . Según la parte (1) del teorema 1.66 observamos que $\mathcal{H}^s(E)$ es una función no creciente de s . Tenemos así el siguiente lema.

Lema 1.69 Sea

$$s_0 := \inf\{s | \mathcal{H}^s(E) = 0\}$$

$$s_1 := \sup\{s | \mathcal{H}^s(E) = \infty\}$$

Entonces $s_0 = s_1$.

Demostración

Si $s < s_1$, como $\mathcal{H}^s(E)$ no es creciente tenemos que

$$\mathcal{H}^s(E) > \mathcal{H}^{s_1}(E) = \infty.$$

Ahora, sea $s > s_1$ y $\beta \in (s_1, s)$. Definimos $M := 1 + \mathcal{H}^\beta(E) < \infty$. Entonces existe un δ – cubrimiento de E tal que

$$\bigwedge_{\delta>0} \mathcal{H}_\delta^\beta(E) \leq \sum_i r_i^\beta \leq M$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) \leq \sum_i r_i^s \leq \delta^{s-\beta} \sum_i r_i^\beta \leq \delta^{s-\beta} M$$

Haciendo que $\delta \rightarrow 0$ tenemos que $\mathcal{H}^s(E) = 0$

■

Definición 1.70 Dimensión de Hausdorff

El número $s_0 = s_1$ del lema anterior se denomina **dimensión de Hausdorff** de E y lo denotaremos por $\dim_{\mathcal{H}}(E)$.

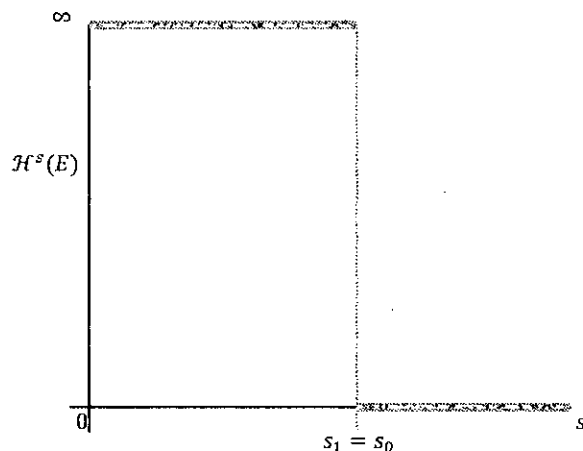


Fig. 1.8 Dimensión de Hausdorff

Al igual que en el teorema 1.68, se verifica que si f es tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$$

para constantes $c > 0$ y $\alpha > 0$. Entonces

$$\dim_{\mathcal{H}} f(E) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_{\mathcal{H}} E \quad (1.8)$$

Vamos a ver un ejemplo de cómo calcular la dimensión de Hausdorff.

Nuestra víctima es el conjunto ternario de Cantor (figura 1.9)

Ejemplo 1.1 Denotemos por F al conjunto ternario de Cantor. Si $s = \frac{\log 2}{\log 3}$

entonces $\dim_{\mathcal{H}}(F) = s$.

Como es bien sabido, F puede ser cubierto por 2^k intervalos de F_k , cada uno de longitud 3^{-k} , donde F_k es la k -ésima aproximación de F .

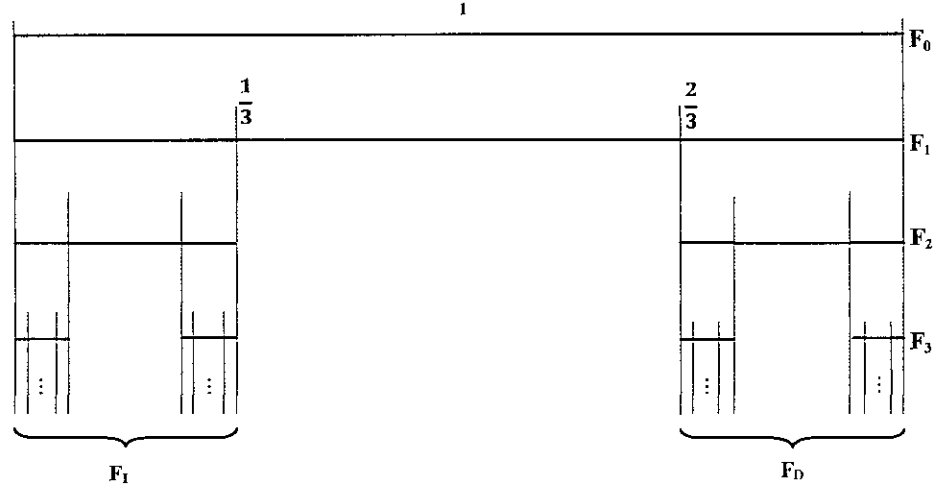


Fig. 1.9 F : El conjunto ternario de Cantor (líneas rojas)

Así pues la medida de Hausdorff es:

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}_{3^{-k}}^s(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^k$$

Este límite vale 0 si $\frac{2}{3^s} < 1$ o, lo que es lo mismo, si $s > \frac{\log 2}{\log 3}$. Además, si

$\frac{2}{3^s} > 1$, o equivalentemente $s < \frac{\log 2}{\log 3}$, vemos que $\mathcal{H}^s(F) = \infty$. Finalmente,

si $\frac{2}{3^s} = 1$ entonces $\mathcal{H}^s(F) = 1$. Por definición entonces, vemos que

$$\dim_{\mathcal{H}}(F) = s = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Otra forma de calcular este valor de s es observar que $F = (F \cap F_I) \cup$

$(F \cap F_D)$. Como F_I y F_D son disjuntos y $F = F_I \cup F_D$, tenemos que

$$\mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s(F_I) + \mathcal{H}^s(F_D) = \left(\frac{1}{3} \right)^s \mathcal{H}^s(F) + \left(\frac{1}{3} \right)^s \mathcal{H}^s(F)$$

Suponiendo que $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ tenemos que

$$1 = 2 \left(\frac{1}{3} \right)^s$$

De donde $s = \frac{\log 2}{\log 3}$.

1.2.3 Definiciones alternativas de dimensión. La dimensión de Minkowsky.

Definición 1.71 La Salchicha de Minkowsky

Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto. Definimos la δ - vecindad de E (conocida también como la **salchicha de Minkowsky** de E):

$$E_\delta := \{x \in \mathbb{R}^n | d(x, E) < \delta\}$$

Y consideramos el n - dimensional volumen de E_δ cuando $\delta \rightarrow 0$.

Definición 1.72 Dimensión superior e inferior de Minkowsky

La **dimensión superior de Minkowsky** α_u y la **dimensión inferior de Minkowsky** α_l se definen como:

$$\alpha_u = \overline{\dim}_{\mathcal{M}}(E) := \inf\{\alpha \in [0, n] | |E_\delta| \lesssim_\alpha \delta^{n-\alpha}\}$$

$$\alpha_l = \underline{\dim}_{\mathcal{M}}(E) := \sup\{\alpha \in [0, n] | |E_\delta| \gtrsim_\alpha \delta^{n-\alpha}\}$$

Definición 1.73 Dimensión de Minkowsky

Si $\alpha_u = \alpha_l = \dim_{\mathcal{M}}(E)$, diremos que E tiene **dimensión de Minkowsky** igual a $\dim_{\mathcal{M}}(E)$.

Se aprecia que para calcular la dimensión de Minkowsky, es necesario tener dos estimaciones. Y luego probar que son iguales.

Veamos un ejemplo que muestra que la dimensión de Hausdorff no siempre es igual a la de Minkowsky.

Ejemplo 1.2

Consideremos el conjunto

$$G := \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k} \right\} \cup \{0\}$$

Dado que G es contable, su dimensión de Hausdorff es 0. Veamos lo que ocurre con su dimensión de Minkowsky. Sea

$$G' := \bigcup_{k=1}^{m-1} \left\{ \frac{1}{k} \right\}$$

y

$$G'' := \bigcup_{k=m}^{\infty} \left\{ \frac{1}{k} \right\} \cup \{0\}$$

donde $\sqrt{\frac{2}{\delta}} \leq m < \sqrt{\frac{2}{\delta}} + 1$. La δ -vecindad K'_δ de K' consiste de discos disjuntos debido a que $2\delta \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$. Por lo tanto

$$|K_\delta| \geq |K'_\delta| = c\delta^{n-\frac{1}{2}}$$

es decir, G tiene dimensión inferior de Minkowsky igual a $\frac{1}{2}$.

En otro lado, la δ -vecindad de G'' no es más grande que la δ -vecindad de una línea de longitud m . Así,

$$|G_\delta| \leq |G'_\delta| + |G''_\delta| \leq c\delta^{n-\frac{1}{2}} + (m + 2\delta)\delta^{n-1} \leq C\delta^{n-\frac{1}{2}}$$

por lo que G tiene también a $\frac{1}{2}$ como dimensión superior de Minkowsky.

Por consiguiente su dimensión de Minkowsky es $\frac{1}{2}$.

1.2.4 Proyecciones de Fractales.

Sea L_α una línea que pasa por el centro de coordenadas en el plano y que hace un ángulo α con el eje horizontal. Denotamos con $Proy_\alpha E$ a la proyección ortogonal de un subconjunto $E \subset \mathbb{R}^2$ sobre L_α .

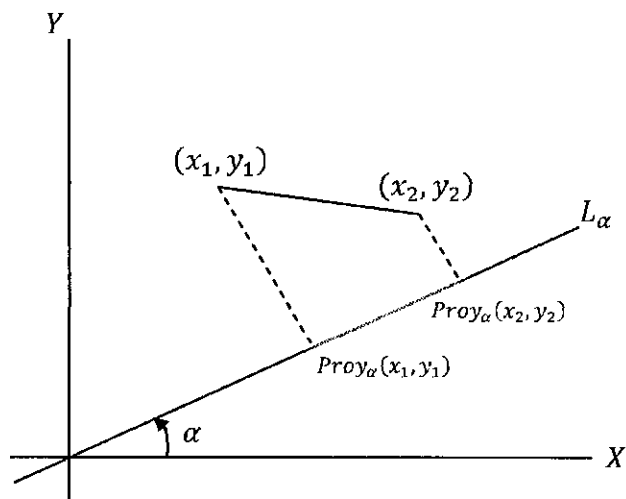


Fig. 1.10 Proyección de dos puntos sobre L_α

Tomemos dos puntos $x = (x_1, y_1), y = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Como se ve en la figura 1.10, $d(\text{Proj}_\alpha x, \text{Proj}_\alpha y)$ es el cateto del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es $d(x, y)$. Por consiguiente

$$d(\text{Proj}_\alpha x, \text{Proj}_\alpha y) \leq d(x, y)$$

Es decir, Proj_α es un mapeo de Lipschitz. De (1.8) (con $\alpha = 1$ en dicha desigualdad) tenemos que

$$\dim_{\mathcal{H}}(\text{Proj}_\alpha E) \leq \dim_{\mathcal{H}}(E) \quad (1.9)$$

Pero como $\text{Proj}_\alpha E$ está en la línea recta L_α , su dimensión no puede ser mayor que 1. Adicionando este hecho con (1.9) tenemos

$$\dim_{\mathcal{H}}(\text{Proj}_\alpha E) \leq \min \{\dim_{\mathcal{H}}(E), 1\} \quad (1.10)$$

Definición 1.74 Conjunto Irregular

Un subconjunto $E \subset \mathbb{R}^2$ se llama *irregular* si existen al menos dos direcciones sobre las cuales la proyección ortogonal de E tiene longitud cero.

La desigualdad (1.10) siempre es válida. El siguiente teorema da la desigualdad opuesta

Teorema 1.75

Sea $F \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto de Borel

(a) Si $\dim_{\mathcal{H}} F \leq 1$, entonces para casi toda $\theta \in [0, \pi)$ se cumple que

$$\dim_{\mathcal{H}}(\text{Proy}_{\theta} F) = \dim_{\mathcal{H}} F.$$

(b) Si $\dim_{\mathcal{H}} F > 1$, entonces para casi toda $\theta \in [0, \pi)$ se cumple que

$$\dim_{\mathcal{H}}(\text{Proy}_{\theta} F) = 1.$$

Teorema 1.76 Teorema de proyección de Besicovitch

Sea F un irregular 1 – conjunto en \mathbb{R}^2 . Entonces $\text{Proy}_{\theta} F$ tiene longitud cero para casi toda $\theta \in [0, \pi)$

1.2.5 El método de Dualidad.

El método de Dualidad consiste en convertir conjuntos de puntos en el plano a conjuntos de líneas y puede ser utilizado para crear nuevos fractales a partir de otros. Para relacionar dichos puntos con rectas (figura 1.11) se introduce una función $L: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definida por

$$\bigwedge_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} L(a,b) = \{(x,y) | y = a + bx\}$$

Dado que una recta queda determinada por su pendiente y su ordenada al origen, vemos que L es biyectiva, por lo que las proposiciones válidas en el dominio de L son válidas también en su imagen. Al plano donde $L(a, b)$ se encuentra lo llamaremos el **plano de líneas**. Al plano donde se encuentra (a, b) lo llamaremos el **plano de puntos**. En esencia, se trata del mismo \mathbb{R}^2 .

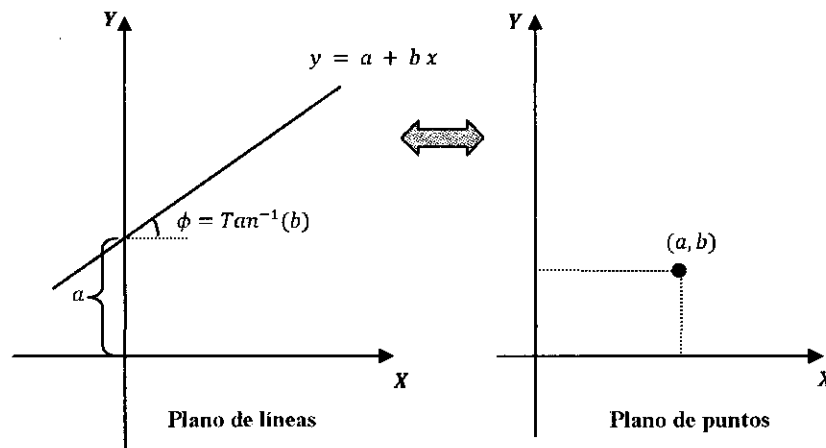


Fig. 1.11 Método de Dualidad

Así, dado $F \subset \mathbb{R}^2$ definimos:

$$L(F) := \bigcup_{(a,b) \in F} \{L(a, b)\}$$

$L(F)$ es el **conjunto de líneas** de F (figura 1.12).

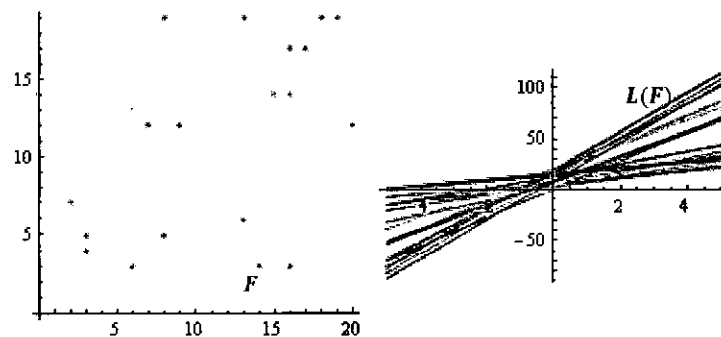


Fig. 1.12 $L(F)$

Denotando por L_c a la línea vertical $x = c$, tenemos

$$L(a, b) \cap L_c = (c, a + bc) = (c, (a, b) \cdot (1, c))$$

Por tanto, para $F \subset \mathbb{R}^2$ tenemos

$$L(F) \cap L_c = \{(c, (a, b) \cdot (1, c)) \mid (a, b) \in F\}$$

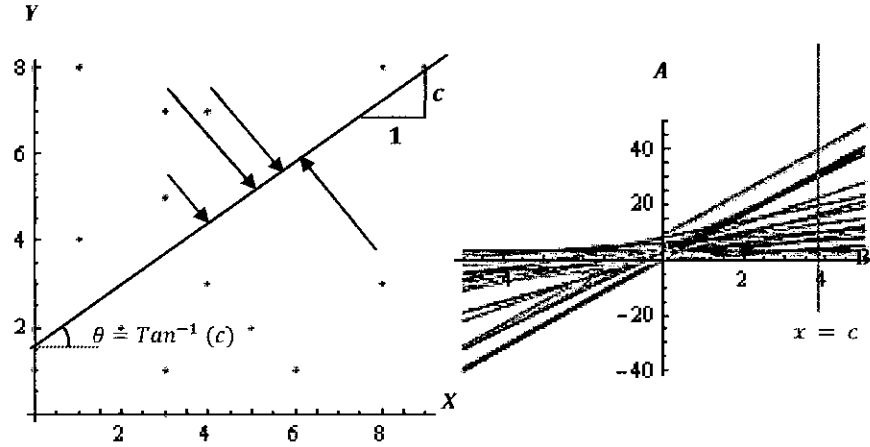


Fig. 1.13 Relación entre $L(F) \cap L_c$ y $Proj_\theta F$

Definición 1.77 Proyección de un vector

Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$. La **proyección** de \vec{a} en la dirección de \vec{b} se define como

$$Proj_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \vec{b} = (Comp_{\vec{b}} \vec{a}) \vec{u}_{\vec{b}}$$

donde $Comp_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|}$ es la **componente** de \vec{a} en la dirección de \vec{b} y $\vec{u}_{\vec{b}}$ es el vector unitario en la dirección de \vec{b} .

Vemos entonces que el producto escalar de (a, b) con el vector $(1, c)$ se interpreta geoméricamente como la componente de la proyección de (a, b) sobre la línea en la dirección del vector $(1, c)$ pero multiplicado por el factor $\|(1, c)\| = \sqrt{1 + c^2}$. Así que $L(F) \cap L_c$ es semejante a $Proj_\theta F$

multiplicado por $\sqrt{1+c^2}$. La relación entre θ y c es $c = \tan\theta$ (figura 1.13).

El teorema 1.67 implica entonces que

$$\dim_{\mathcal{H}}(L(F) \cap L_c) = \dim_{\mathcal{H}} \text{Proy}_{\theta} F \quad (1.11)$$

y (1.6) implica que

$$|L(F) \cap L_c| = 0 \Leftrightarrow |\text{Proy}_{\theta} F| = 0$$

Observación 1.4

L_c se encuentra en el plano de líneas mientras que $\text{Proy}_{\theta} F$ se encuentra en el plano de puntos.

Lema 1.78 Sea $F \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto de Borel. Entonces, para casi toda c ,

$$\dim_{\mathcal{H}}(F \cap L_c) \leq \max\{0, \dim_{\mathcal{H}} F - 1\}$$

Observación 1.5

Si F es un conjunto de Borel, $L(F)$ no necesariamente lo es, pero sí lo será si F es compacto.

Teorema 1.79 Sea $L(F)$ el conjunto de líneas de un conjunto de Borel $F \subset \mathbb{R}^2$. Entonces

$$\dim_{\mathcal{H}} L(F) \geq \min\{2, 1 + \dim_{\mathcal{H}} F\}$$

Demostración

Del lema 1.78 y 1.69 y del teorema 1.75 se tiene que para casi toda $\theta \in [0, \pi)$

$$\min\{\dim_{\mathcal{H}} F, 1\} = \dim_{\mathcal{H}} \text{Proy}_{\theta} F = \dim_{\mathcal{H}}(L(F) \cap L_c)$$

$$\leq \max\{0, \dim_{\mathcal{H}} L(F) - 1\}.$$

Si $\dim_{\mathcal{H}} L(F) > 1$, $\min\{\dim_{\mathcal{H}} F, 1\} \leq \dim_{\mathcal{H}} L(F) - 1$ lo que implica que

$$\dim_{\mathcal{H}} L(F) \geq \min\{2, 1 + \dim_{\mathcal{H}} F\}$$

Si $\dim_{\mathcal{H}} L(F) \leq 1$ entonces $\min\{\dim_{\mathcal{H}} F, 1\} \leq 0$, lo que implica que $\dim_{\mathcal{H}} F = 0$. Esto tiene sentido si y sólo si $\dim_{\mathcal{H}} L(F) = 1$. Esto nos dice que $1 \leq \dim_{\mathcal{H}} L(F) \leq 2$

■

1.3 Probabilidad Geométrica

Esta rama de las matemáticas se ocupa de problemas de probabilidad relacionados a eventos que ocurren sobre objetos geométricos.

Definición 1.80 Probabilidad de la Aguja de Bufón

Dado un conjunto acotado $S \subset \mathbb{R}^2$, la **probabilidad de la aguja de Bufón** de S está definida mediante la siguiente expresión integral:

$$Bu(S) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^\pi |Proy_\theta S| d\theta \quad (1.12)$$

donde $Proy_\theta S$ representa la proyección de S sobre una recta L_θ en la dirección de θ .

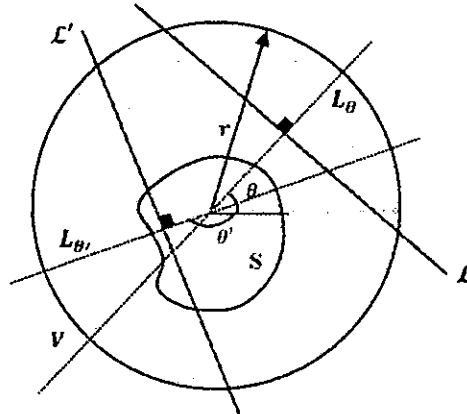


Fig. 1.14 $Bu(S)$

El significado de (1.12) es el siguiente: Sea r el radio de un disco V que contiene a S , entonces la probabilidad de que una aguja \mathcal{L} , colocada en un ángulo perpendicular a θ y distancia desde el origen menor que r , intercepte a S es precisamente $Bu(S)$. Debe remarcarse que tanto la orientación como la distancia al origen son elegidas al azar de forma independiente y uniforme.

En particular, utilizaremos $S = \mathcal{K}$, donde \mathcal{K} es el llamado conjunto “la arena de Cantor” o el conjunto de las cuatro esquinas de Cantor. \mathcal{K} se construye al reemplazar el cuadrado unidad por cuatro sub cuadrados en sus esquinas con lados de longitud $\frac{1}{4}$, y luego iteramos esta operación en una manera auto – similar en cada sub cuadrado.

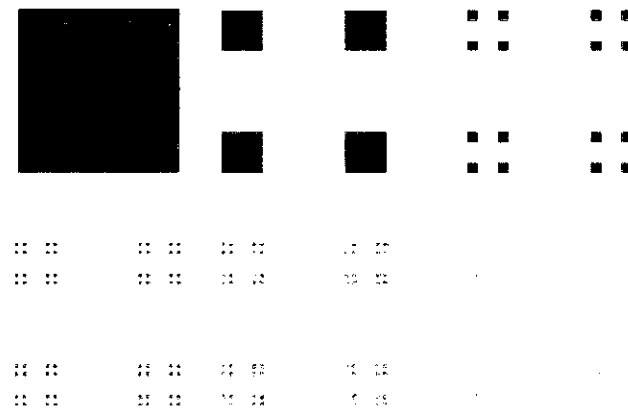


Fig. 1.15 Las seis primeras iteraciones en la construcción del conjunto \mathcal{K}

Más formalmente, denotemos mediante C_n a la unión de 2^n segmentos:

$$C_n := \bigcup_{\substack{a_j \in \{0,3\} \\ j=1,\dots,n}} \left[\sum_{j=1}^n a_j 4^{-j}, \sum_{j=1}^n a_j 4^{-j} + 4^{-n} \right]$$

Y sea el conjunto medio de Cantor

$$C := \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$$

También podemos escribir

$$C = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n 4^{-n} \mid a_n \in \{0,3\} \right\}$$

Entonces $\mathcal{K} := C \times C$.

Definición 1.81 *Longitud de Favard*

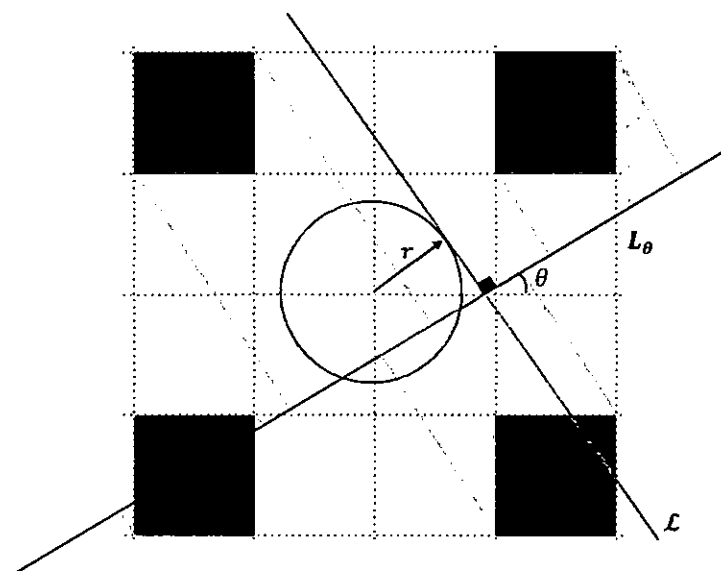
Sea $S \subset \mathbb{R}^2$. El promedio de las proyecciones de S sobre L_θ (L_θ como en la definición 1.80), que se conoce como la **longitud de Favard** de S , se define como

$$Fa(S) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |Proy_\theta S| d\theta \quad (1.13)$$

La figura 1.16 nos muestra la relación ente $Bu(\mathcal{K})$ y la longitud de Favard de \mathcal{K} . (\mathcal{K}_2 es la segunda aproximación a \mathcal{K})

Note el parecido entre (1.12) y (1.13). Para conjuntos acotados, como en el caso de \mathcal{K} , se sigue que

$$Bu(S) = \frac{Fa(S)}{2r} \quad (1.14)$$

Fig. 1.16 $Bu(\mathcal{K}_2)$

Para el caso de \mathcal{K} , el disco V es el cuadrado unidad (esto no constituye ninguna contradicción ni problema pues en el plano la métrica con discos en forma de círculo es equivalente a la que usa cuadrados). Así pues, suponemos que la aguja \mathcal{L} tiene longitud infinita y elegimos su posición y dirección como en la probabilidad de Bufón. En este caso, la aguja sería tangente a círculos cuyos centros coincidan con el centro del cuadrado unidad.

1.4 Geometría Algebraica Combinatoria

1.4.1 El Método Polinomial

El método polinomial es un método de la geometría algebraica combinatoria que ha sido empleado para analizar los parámetros combinatorios de subconjuntos de un espacio vectorial que satisfacen determinadas condiciones algebraicas. Sirve por tanto también para

controlar el tamaño de varios subconjuntos E mediante observar uno o más polinomios P que se anulan en E .

Esta técnica procede en tres etapas:

Sea $K \subset F$, donde F es un espacio vectorial y además K cumple algunas condiciones algebraicas.

1. Construir un polinomio no nulo con un apropiado grado bajo, tanto como se pueda, que se anula K .
2. Usar las condiciones algebraicas en K para mostrar que el polinomio se anula también en los puntos fuera de K .
3. Finalmente, se usa el hecho de que el polinomio es idénticamente nulo en F para derivar cotas en los parámetros combinatorios de interés.

Por ejemplo el siguiente teorema da la conexión entre conjuntos E unidimensionales y polinomios $P(x)$ de una variable.

Teorema 1.82 *El Teorema Fundamental del Álgebra*

Sea \mathbb{F} un campo y $d > 0$ un entero. $\mathbb{F}[x]$ denota a los polinomios en una variable con coeficientes en \mathbb{F} .

1. Si $P \in \mathbb{F}[x]$ es un polinomio no nulo de grado a lo más d , entonces el conjunto $\{x \in \mathbb{F} | P(x) = 0\}$ tiene cardinal a lo más d .
2. Recíprocamente, dado cualquier conjunto $E \subset \mathbb{F}$ con $\# E < d$ existe un polinomio no nulo $P \in \mathbb{F}[x]$ de grado a lo más d que se anula en E .

Observación 1.6

Por consiguiente, para obtener una cota superior en el tamaño de un conjunto unidimensional E , es suficiente exhibir un polinomio no nulo de bajo grado que se anula en E ; recíprocamente, para una cota inferior en el tamaño de E , uno tendría que mostrar que el único polinomio de bajo grado que se anula en E es el polinomio nulo. Este último tipo de observación es la que es relevante a la CKCF.

Hay analogías de 1. y 2. para altas dimensiones. Por ejemplo, el lema de Schwartz - Zippel es la analogía para altas dimensiones de 1.

Desafortunadamente el método polinomial es extremadamente dependiente de la naturaleza algebraica del campo finito y no se extiende directamente al caso euclidiano. Esto dificulta la utilización de la solución de la CKCF a la solución de la conjetura euclidiana.

CAPÍTULO 2

DESARROLLO HISTÓRICO DE LA CONJETURA

2.1 Introducción

La figura (2.0.0) corresponde a un conjunto de estalactitas que se encuentran en una cueva de Santander, España; (2.0.1) a un cuadro suprematista de K. Malevich; (2.0.2) a una pieza de mineral proveniente de la India y (2.0.3) a un árbol de Ficus que se



Fig. 2.0.0

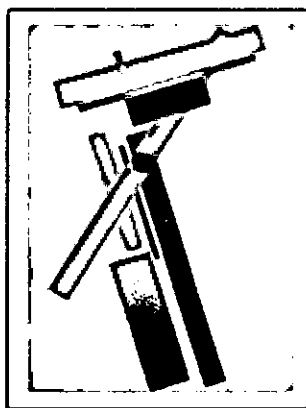


Fig. 2.0.1

encuentra en la plaza de Armas de Catacaos, Piura. Hay algo en común entre todos estos: poseen la característica de tener segmentos de línea recta en varias direcciones. Esta es la característica principal de los conjuntos que estudiaremos en este capítulo y que surgen de dos antiguos problemas: El problema de

Besicovitch y el de Kakeya.

En este capítulo se expondrán estos problemas, y sus respectivas soluciones, que dieron origen a la conjetura que vamos a estudiar.



Fig. 2.0.2

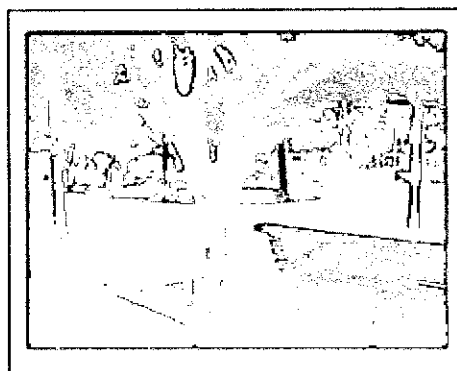


Fig. 2.0.3

2.2 El Problema de Besicovitch

Abram Samoilovitch Besicovitch (1891-1970) nació en Berdyansk, ciudad ubicada al sur de Rusia. En 1917, poco después de graduarse en la universidad de San Petersburgo, fue designado profesor de matemáticas en la recién formada Universidad de Perm, ciudad ubicada en los Montes Urales. Fue ahí donde Besicovitch estuvo trabajando en un

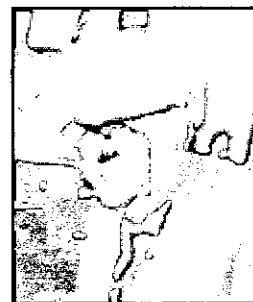


Fig. 2.1 Abram
Besicovitch
(1891 – 1970)

problema sobre la integración en el sentido Riemann. La cuestión era la siguiente:

Afirmación 1.1

Sea f una función de dos variables sobre \mathbb{R}^2 integrable en el sentido de Riemann. Existe siempre un sistema de coordenadas rectangular $X - Y$

tal que $f(x, y)$ es una función integrable en el sentido de Riemann como función de una variable y que el valor de la integral de f sobre \mathbb{R}^2 sea igual al de la integral iterada $\iint f(x, y) dx dy$

Se obtiene un contraejemplo a la afirmación 1.1 al resolver el siguiente problema:

Problema 1. El Problema de Besicovitch

Construir un conjunto de medida Lebesgue nula en \mathbb{R}^2 que contenga un segmento de línea en cada dirección.

Más precisamente, supongamos que E es tal conjunto y fijemos un sistema de coordenadas rectangulares $X - Y$ en el plano. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } (x, y) \in E \wedge (x \vee y \in \mathbb{Q}) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La figura 2.2 nos ayuda a visualizar la situación:

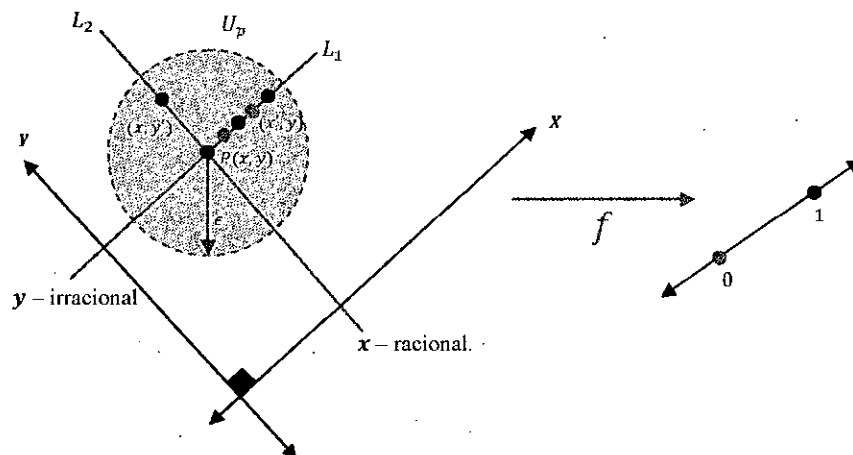


Fig. 2.2

Besicovitch procedió entonces a la construcción del conjunto E .

2.3 Solución del Problema de Besicovitch

Los conjuntos que son contraejemplos de la afirmación 1.1 se conocen como *conjuntos de Besicovitch*. Su construcción original, presentada en 1919, ha sido simplificada al utilizar el llamado “árbol de Perron”.

Definición 2.2 *Árbol de Perron*

Es una figura plana construida iterativamente a partir de un triángulo y que se obtiene al deslizar, sobre la base del triángulo original, triángulos adyacentes de manera que exista un ligero traslapamiento entre ellos.

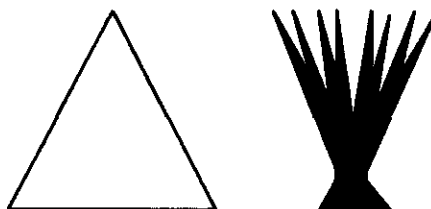


Fig. 2.3 Árbol de Perron

Es obvio que tal árbol contiene un segmento, de longitud unitaria si se manipula adecuadamente la altura del triángulo original, en cada dirección entre las direcciones de los lados izquierdo y derecho del triángulo original, el cual se puede asumir equilátero (se ve entonces que tal árbol contiene segmentos en todas las direcciones entre 60° y 120°). Tomando dos copias más de tal conjunto y rotándolas entre 60° y 180°

obtenemos un conjunto de Besicovitch. Mostraremos que estos árboles de Perron tienen medida arbitrariamente pequeña¹.

Lema 2.3: *Consideremos un triángulo T con base en una línea L y altura h . Dividimos la base de T en dos segmentos iguales y unimos el punto de división con el vértice opuesto para formar dos triángulos adyacentes T_1 y T_2 con base de longitud b y altura h . Sea $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Si T_2 se desliza una distancia $2(1 - \alpha)b$ a lo largo de L y sobre T_1 , la figura resultante S consiste de un triángulo T' , semejante al triángulo T y con área $|T'| = \alpha^2|T|$, y dos triángulos auxiliares A_1 y A_2 . Para esta construcción, el área de S es dada por:*

$$|S| = (\alpha^2 + 2(1 - \alpha)^2)|T|$$

Demostración:

La figura 2.4 ilustra la situación: Se observa que $|S| = |A_1| + |A_2| + |T'|$. Además, los triángulos T y T' son semejantes. La base b' de T' viene dada por:

$$b' = 2[b - 2(1 - \alpha)b] + 2(1 - \alpha)b$$

$$b' = 2b\alpha$$

Estableciendo la proporción entre bases y alturas se tiene:

$$\frac{h}{2b} = \frac{h'}{2b\alpha}$$

De donde $h' = \alpha h$. Luego $|T'| = \frac{1}{2}b'h' = \frac{1}{2}(2b\alpha)(\alpha h) = \alpha^2|T|$

¹ Al tratarse de una cuestión de existencia, la construcción del árbol de Perron que aquí se expone simplifica las estimaciones del área implicada. Para el caso general, ver [HR98]

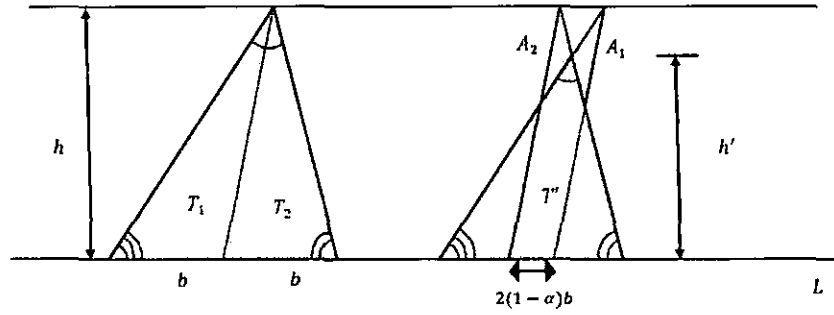


Fig. 2.4 Bisección del triángulo T y la figura S resultante

Para calcular el área de A_1 y A_2 , trazamos una recta paralela a la línea base L y que pase por el punto de intersección de A_1 y A_2 (ver figura 2.5).

Así obtenemos cuatro triángulos A_{21} , A_{22} , A_{11} y A_{12} .

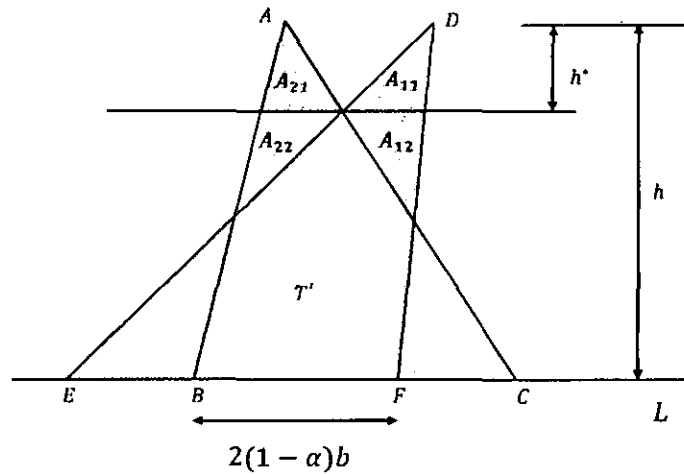


Fig. 2.5 Los triángulos A_{11} , A_{12} , A_{21} y A_{22}

Además, $A_{11} \sim \triangle DEF = T_1$ y $A_{21} \sim \triangle ABC = T_2$. Para ambos triángulos se cumple la siguiente proporción (entre alturas y bases) de semejanza:

$$\frac{h^*}{(1-\alpha)b} = \frac{h}{b}$$

De aquí, $h^* = (1-\alpha)h$. Así,

$$|A_{11}| = |A_{21}| = \frac{1}{2}(1 - \alpha)h(1 - \alpha)b = \frac{1}{2}(1 - \alpha)^2|T|$$

Además, $A_{12} \cong A_{21}$ y $A_{11} \cong A_{22}$. Por lo tanto,

$$|A_{11}| = |A_{21}| = |A_{22}| = |A_{12}| = \frac{1}{2}(1 - \alpha)^2|T|$$

Finalmente,

$$|S| = |T| + |A_1| + |A_2| = (\alpha^2 + 2(1 - \alpha)^2)|T|$$



Este proceso es la base para la construcción de los conjuntos de Besicovitch. Se llama "tronco" a T' y "ramas" o "brazos" a A_1 y A_2 . Veremos que es posible construir árboles con un "tronco" muy diminuto y muchos "brazos".

Teorema 2.4: *Consideremos un triángulo T con base en una línea L y altura h . Dividimos la base de T en 2^k segmentos de igual longitud y unimos los puntos de división con el vértice opuesto para formar 2^k triángulos elementales T_1, T_2, \dots, T_{2^k} . Si k es suficientemente grande, existe una traslación a lo largo de L para cada T_i ($1 \leq i \leq 2^k$) tal que el área de la figura resultante S , la cual es la unión de los triángulos trasladados T_i , es tan pequeña como se desee. Además, para un abierto V tal que $T \subset V$, esta traslación puede ser realizada de manera que $S \subset V$ (con k suficientemente grande)*

Demostración:

En el primer paso de la construcción, consideremos pares consecutivos de triángulos elementales T_{2i-1}, T_{2i} ($1 \leq i \leq 2^k$) con base de longitud b .

Movemos T_{2i} a lo largo de L y sobre T_{2i-1} tal como se describe en el lema 2.3 y así obtenemos una figura S_i^1 que consiste de un "tronco" T_i^1 ($T_i^1 \sim T_{2i} \cup T_{2i-1}$) y dos "ramas" A_{2i}^1 y A_{2i-1}^1 . Dado que el parámetro α que aparece en el lema 2.3 es fijo a lo largo de la construcción, lo especificaremos después según sea necesario.

De acuerdo al lema 2.3,

$$\begin{aligned} |S_i^1| &= (\alpha^2 + 2(1 - \alpha)^2) |T_{2i}^1 \cup T_{2i-1}^1| \\ &= \underbrace{\alpha^2 |T_{2i}^1 \cup T_{2i-1}^1|}_{\text{Área del "tronco"}} + \underbrace{2(1 - \alpha)^2 |T_{2i}^1 \cup T_{2i-1}^1|}_{\text{Área de las "ramas"}} \end{aligned}$$

Notemos que para cada i , un lado del triángulo T_{2i-1}^1 es paralelo e igual al lado opuesto de T_{2i}^1 . Por lo tanto podemos trasladar los S_i^1 tal que sus 2^{k-1} "troncos" T_i^1 formen el "tronco" compuesto T^1 , el cual es semejante al triángulo original T (ver figura 2.6 para el caso $k = 3$). De aquí podemos averiguar la relación entre $|T^1|$ y $|T|$.

Dado que hay 2^k triángulos ergo hay 2^{k-1} parejas de triángulos. Cada una de ellas tiene una base de longitud $b(2\alpha - 1) + b = 2\alpha b$, por lo que la base de T^1 mide $2^k \alpha b$.

Si denotamos por h^1 y h a la altura de T^1 y T respectivamente, entonces la proporción de semejanza (entre bases y alturas) es:

$$\frac{h}{2^k b} = \frac{h^1}{2^k \alpha b} \Rightarrow h^1 = \alpha h$$

Por consiguiente $|T^1| = \alpha^2 |T|$. Durante la construcción hay traslapamiento entre las ramas de los S_i^1 , por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{2^{k-1}} |S_i^1| \leq (\alpha^2 + 2(1 - \alpha)^2) \sum_{i=1}^{2^{k-1}} |T_{2i-1} \cup T_{2i}| = (\alpha^2 + 2(1 - \alpha)^2) |T|$$

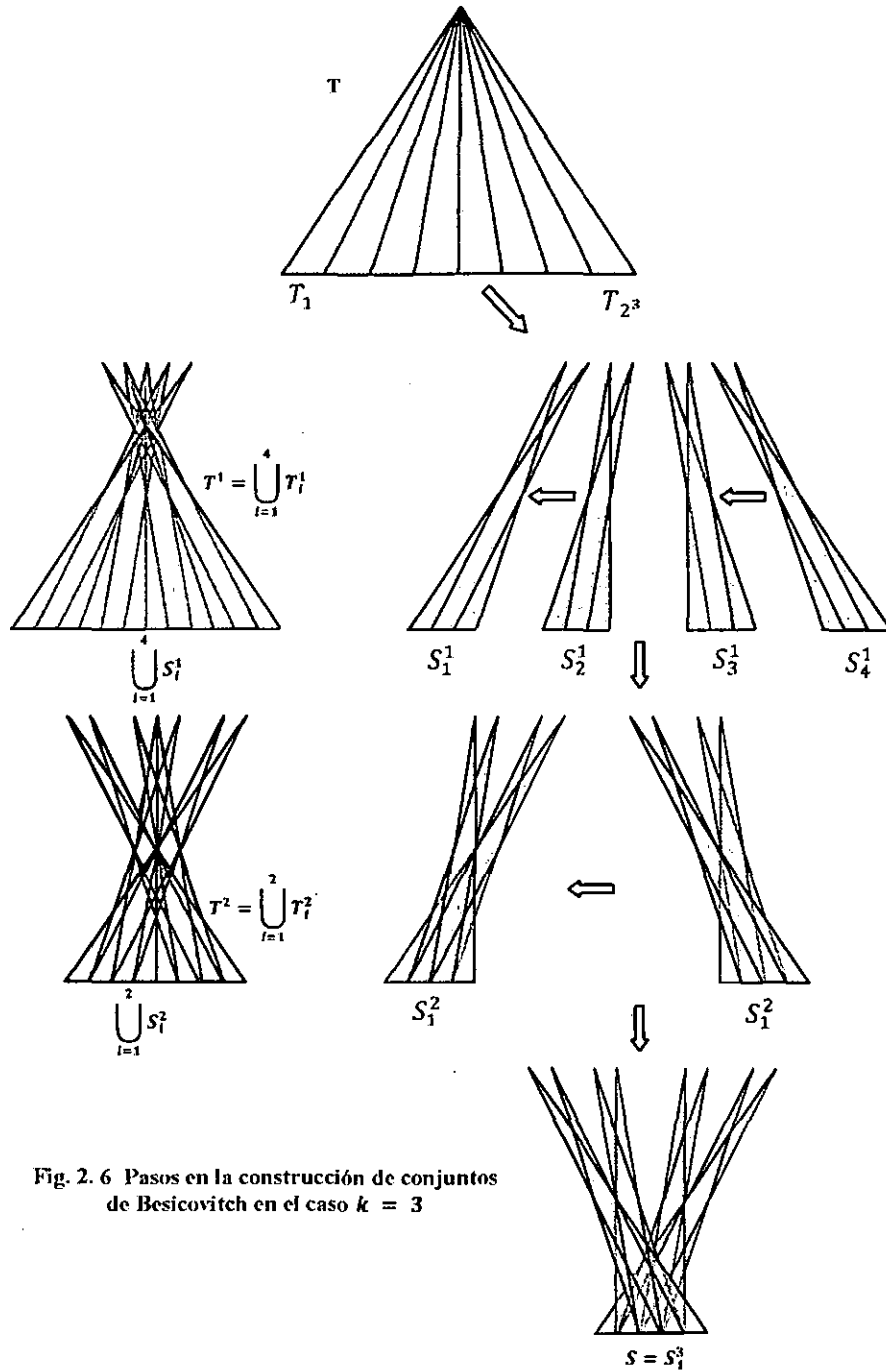


Fig. 2. 6 Pasos en la construcción de conjuntos de Besicovitch en el caso $k = 3$

En el segundo paso de la construcción trabajamos con consecutivos S_i^1 . Para $1 \leq i \leq 2^{k-2}$ trasladamos igual que antes a S_{2i}^1 sobre S_{2i-1}^1 para obtener 2^{k-2} figuras S_i^2 . Aplicamos el lema 2.3 a T^1 y obtenemos que

$$|T^2| = \alpha^2 |T^1| = \alpha^2 \cdot \alpha^2 |T|$$

, y además que el área de las ramas no es mayor (debido al traslapamiento) que $2(1 - \alpha)^2 \alpha^2 |T|$. Así pues,

$$\sum_{i=1}^{2^{k-2}} |S_i^2| \leq (\alpha^4 + 2(1 - \alpha)^2 \alpha^2) |T| \leq (\alpha^4 + 2(1 - \alpha)^2 + 2(1 - \alpha)^2 \alpha^2) |T|$$

En el r -ésimo paso ($2 \leq r \leq k$) trasladamos las figuras S_i^{r-1} ($1 \leq i \leq 2^{k-r+1}$) tal como describimos en el segundo paso para obtener 2^{k-r} figuras $S_1^{r+1}, \dots, S_{2^{k-r}}^{r+1}$.

En cada paso, el área del tronco es multiplicada por α^2 y el área de las ramas adicionales en el r -ésimo paso no será mayor que $2(1 - \alpha)^2 \alpha^{2r-2} |T|$. Es decir:

$$\sum_{i=1}^{2^{k-r+1}} |S_i^r| \leq (\alpha^{2r} + 2(1 - \alpha)^2 \sum_{j=0}^{r-1} \alpha^{2j}) |T|$$

Finalmente, terminamos en una sola figura $S = S_1^k$ para la cual se cumple (debido al traslapamiento):

$$|S| \leq (\alpha^{2k} + 2(1 - \alpha)^2 \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^{2j}) |T|$$

Pero,

$$\begin{aligned} 2(1 - \alpha)^2 \sum_{j=0}^{k-1} \alpha^{2j} &\leq 2(1 - \alpha)^2 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^{2j} = \frac{2(1 - \alpha)^2}{1 - \alpha^2} = 2 \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \\ &< 2(1 - \alpha) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|S| \leq (\alpha^{2k} + 2(1 - \alpha))|T|$$

Tomando $\alpha = 1 - \epsilon$, tenemos $|S| \leq ((1 - \epsilon)^{2k} + 2\epsilon)|T|$

Tomando el límite,

$$0 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} |S| = |S| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} ((1 - \epsilon)^{2k} + 2\epsilon)|T| = 2\epsilon|T|$$

Por lo que $|S|$ tiene área tan pequeña como se quiera.

Sea ahora V un abierto en \mathbb{R}^2 tal que $T \subset V$.

Dividimos T en triángulos con una base de longitud menor que ϵ y aplicamos la construcción descrita anteriormente, es decir, construimos un $k = \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil$ – árbol de Perron (esto significa que repetimos iterativamente k veces el lema 2.3) y formamos un conjunto S' de área arbitrariamente pequeña. Entonces la distancia de cada punto de S' a T es menor que ϵ . Empleamos argumentos no estándares para demostrar esto (ver fig. 2.7).

Dado que ϵ es infinitésimo, a medida que aumentan los pasos de la construcción, es decir a medida que $k \rightarrow \infty$, el punto P se aproxima a C con lo cual el segmento \overline{EP} se aproxima al lado \overline{BC} . Sea b_T la longitud de la base de T . Entonces el punto más distante del árbol, el cual es P , tiene una distancia a T que es el cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es menor que $b_T \alpha^{k-1}$ por lo que dicho cateto puede hacerse tan pequeño como se quiera. Si ϵ es tomado lo suficientemente pequeño entonces $S' \subset V$.

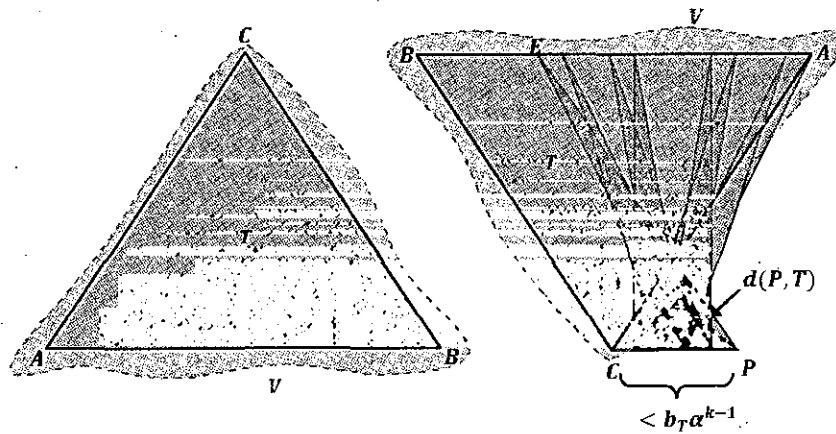


Fig. 2. 7 Acotación de los conjuntos de Besicovitch

La siguiente figura corresponde a la quinta iteración de la construcción de un conjunto de Besicovitch construido usando árboles de Perron. El triángulo base es isósceles, rectángulo y de altura relativa a la hipotenusa igual a 1.

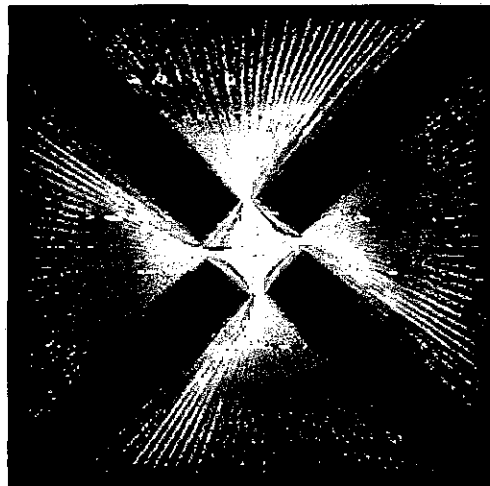


Fig. 2. 8 Un conjunto de Besicovitch

Pasemos al límite de la construcción del teorema 2.4:

Teorema 2.5 Para $n \geq 2$ existe un conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ con medida de Lebesgue n – dimensional igual a cero el cual contiene un segmento de línea de longitud uno en cada dirección

Demostración

Debido a que es una cuestión de existencia, para $n = 2$, denotamos por S_0 a un triángulo rectángulo isósceles con altura relativa a la hipotenusa igual a 1. Sea V_0 un conjunto abierto tal que $S_0 \subset V_0$ y cuya clausura satisface $|\overline{V_0}| \leq 2|S_0|$ (esto debido a la ultima parte del teorema 2.4).

Ya que $|S_0| = 1$, tomando $\epsilon = \frac{1}{8}$ en el teorema 2.4 y aplicándolo a S_0 , obtenemos un conjunto $S_1 \subset V_0$ tal que $|S_1| \leq 2^{-2}$. Puesto que S_1 es una unión finita de triángulos, entonces es medible, por consiguiente existe un cubrimiento abierto de S_1 con medida tan cercana a $|S_1|$ como se quiera. De esto y (T2), existe entonces un conjunto abierto V_1 que satisface $S_1 \subset V_1 \subset V_0$ y $|\overline{V_1}| \leq 2|S_1|$.

Análogamente, re aplicando el teorema 2.4 a S_{i-1} obtenemos un conjunto S_i el cual satisface:

- (1) $|S_i| \leq 2^{-i-1}$
- (2) $S_i \subset V_i \subset V_{i-1}$ y $|\overline{V_i}| \leq 2|S_i|$

Sea

$$F_1 = \bigcap_{i=0}^{\infty} \overline{V_i} \quad (2.1)$$

Mostramos que este conjunto cerrado tiene las propiedades requeridas por el teorema 2.5 (para obtener los segmentos en todas direcciones, basta tomar cuatro copias de F_1 y rotarlas 90° cuatro veces). Se tiene que

$$|F_1| \leq |\bar{V}_i| \leq 2^{-i}$$

Por lo que (haciendo que $i \rightarrow \infty$) $|F_1| = 0$.

Además, sabemos que cada S_i , y por consiguiente cada \bar{V}_i , contiene un segmento unitario en cada dirección θ el cual forma un ángulo de entre 45° y 135° con la línea base. Sea M_i un segmento unitario con dirección θ y $M_i \subset \bar{V}_i$.

Para un j fijo, notemos que $M_i \subset \bar{V}_j$ para $i \geq j$ y que \bar{V}_j es compacto (cerrado y acotado por \bar{V}_0).

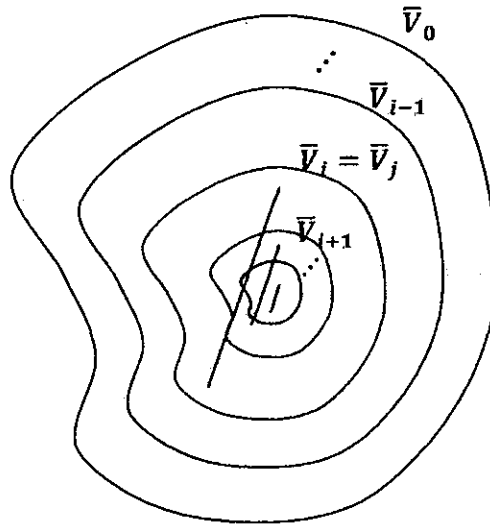


Fig. 2. 9 Paso al límite en la construcción de conjuntos de Besicovitch (los tamaños de los segmentos son referenciales)

Por consiguiente, la sucesión $\{M_i\}$ tiene una sub sucesión convergente a un segmento unitario M con dirección θ . Dado que $M_i \subset \bar{V}_j$ para $i \geq j$, del teorema 1.13,

$$\bigcap_{j \in \mathbb{N}} M \subset \bar{V}_j \Rightarrow M \subset \bigcap_{i=0}^{\infty} \bar{V}_i = F_1$$

Para $n > 2$, construimos un conjunto 2 – dimensional de Besicovitch F_1 . Definimos $F := F_2 \times S^{n-3}$, donde S^{n-3} es la esfera unitaria en \mathbb{R}^{n-2} . Por el teorema 1.50 se ve que F tiene medida de Lebesgue n – dimensional nula y contiene un segmento de línea unitario en cada dirección. Esto completa la demostración. ■

Un método alternativo que simplifica al anterior, consiste en considerar a la línea base como un eje de ordenadas Y , y por consiguiente a una recta perpendicular a éste como eje X , de manera que cada segmento de línea l del conjunto de Besicovitch K tenga pendiente m e y – intersección b . Denotemos al conjunto de todos los pares ordenados (m, b) mediante S . Decimos que S está en el plano $m - b$ mientras que K está en el plano $X - Y$.

Por conveniencia, estiramos los segmentos de línea de manera que su dominio sea el intervalo $[0,1]$. Por consiguiente los segmentos de línea son los conjuntos

$$l_{m,b} = \{(x, y): y = mx + b, 0 \leq x \leq 1\}$$

Como se observa en la figura 2.10, la construcción de K se reduce a construir S y esto se logra mediante la creación de una regla de correspondencia apropiada que seleccione una y -intersección b para cada pendiente m .

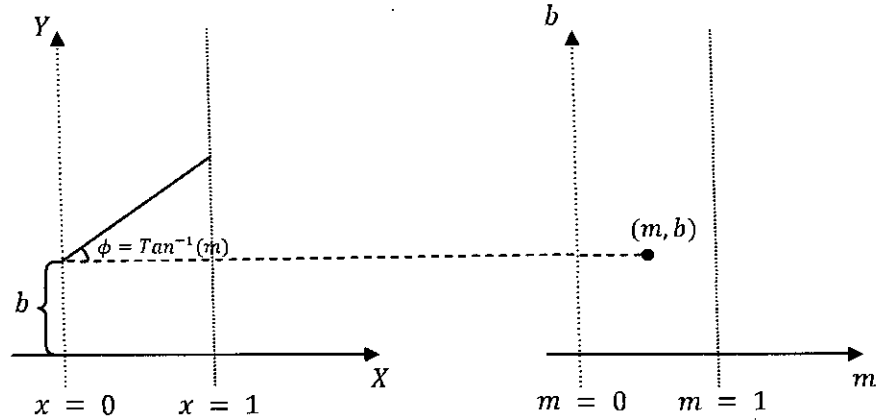


Fig. 2.10 Los planos $X - Y$ y $m - b$

Por lo tanto, en notación de conjuntos, K está definido como:

$$K := \bigcup_{(m,b) \in S} l_{m,b} \quad (2.2)$$

Veamos cuál es la relación entre K y S .

Puesto que S determina completamente a K , se debe convertir la ecuación $|K| = 0$ en una que involucre a S . Para lograrlo, acomodamos la notación para poder utilizar el método de dualidad.

Para cualquier $x \in [0,1]$, denotemos con V_x a la recta vertical con abscisa x en el plano $X - Y$. Sea $L_x = V_x \cap K$ (el corte vertical de K en x). Luego

$$|K| = \int_0^1 |L_x| dx \quad (2.3)$$

Teorema 2.6: Sea S un subconjunto del plano $m - b$, K definido como en (2.2), $x = \cot \theta$ y denotemos a la proyección ortogonal de S sobre θ mediante $\text{Proy}_\theta S$ y a la sección vertical de K en x mediante L_x . Entonces

$$|\text{Proy}_\theta S| = |L_x| \sin \theta$$

Además

$$|K| = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} |\text{Proy}_\theta S| \csc^3 \theta d\theta \quad (2.4)$$

Demostración:

La primera parte es consecuencia directa del método de dualidad. Por conveniencia, se intercambian los ejes del plano de puntos. Para la segunda parte dividimos el primer resultado entre $\sin \theta$ y lo reemplazamos en (2.3):

$$|K| = \int_0^1 |L_x| dx = \int_0^1 \frac{|\text{Proy}_\theta S|}{\sin \theta} dx$$

Hacemos el cambio de variable $x = \cot \theta$ de donde

$$|K| = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} |\text{Proy}_\theta S| \csc^3 \theta d\theta$$

■

Notemos el parecido entre (2.4) y (1.12). La relación entre ambas es la siguiente: dado que $\csc \theta \in [1, \sqrt{2}]$ cuando $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$, tenemos que:

$$|K| \leq 2^{3/2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} |L_\theta| d\theta \leq 2^{5/2} \pi r Bu(S) \quad (2.5)$$

Por consiguiente, si (a) $Bu(S) = 0$ y (b) S contiene como mínimo un punto (m, b) para cada b en $[0, 1]$, se sigue entonces que K es un conjunto de Kakeya. Estas dos propiedades son aparentemente contradictorias, puesto que la proyección sobre el eje m debe ser un intervalo pero casi cualquier otra proyección ortogonal debe tener longitud cero. Sin embargo, esto es lo que precisamente esperamos pues (a) nos dice que K tiene área cero y (b) que K tiene segmentos de línea en cada dirección. Construimos S de manera que satisfaga las propiedades (a) y (b). Para esto vamos a relacionarlo con el conjunto 2 – dimensional de Cantor \mathcal{K} , que se construye a partir de un cuadrado de lado 1. Según (1.14), $Bu(\mathcal{K})$ es baja pues las proyecciones de \mathcal{K}_n sobre los ejes horizontal y vertical decaen exponencialmente (el factor es $(\frac{1}{4})^n$ si el cuadrado tiene lado 1). La siguiente figura muestra a \mathcal{K}_1 y \mathcal{K}_2 rotados:

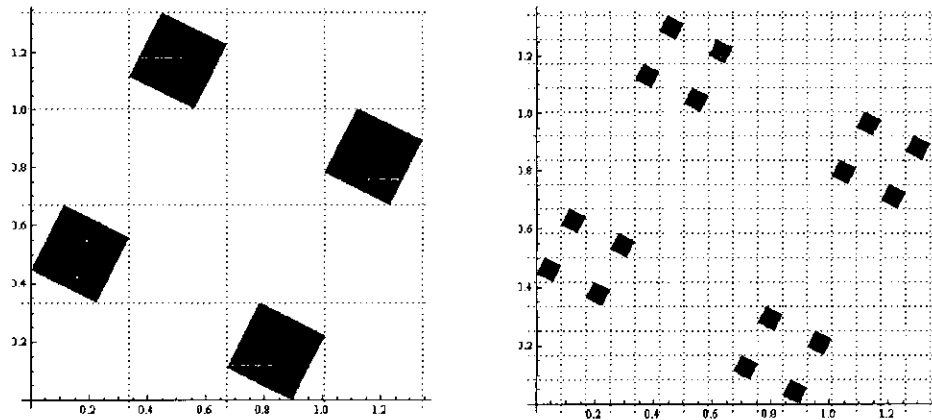


Fig. 2. 11 Los conjuntos \mathcal{K}_1 y \mathcal{K}_2 rotados

Se observa que las proyecciones ortogonales de \mathcal{K}_1 y \mathcal{K}_2 sobre el eje inferior cubren un determinado segmento de éste. Si modificamos a \mathcal{K} de manera que esté dentro de un cuadrado coordenado (es decir, un cuadrado con lados paralelos a los ejes) de lado 1, podemos hacer una conexión entre \mathcal{K} y el plano $m - b$. Esto equivale a decir que las intersecciones estén entre 0 y 1 al igual que las pendientes. Siguiendo la notación, en vez de \mathcal{K} ahora escribiremos S .

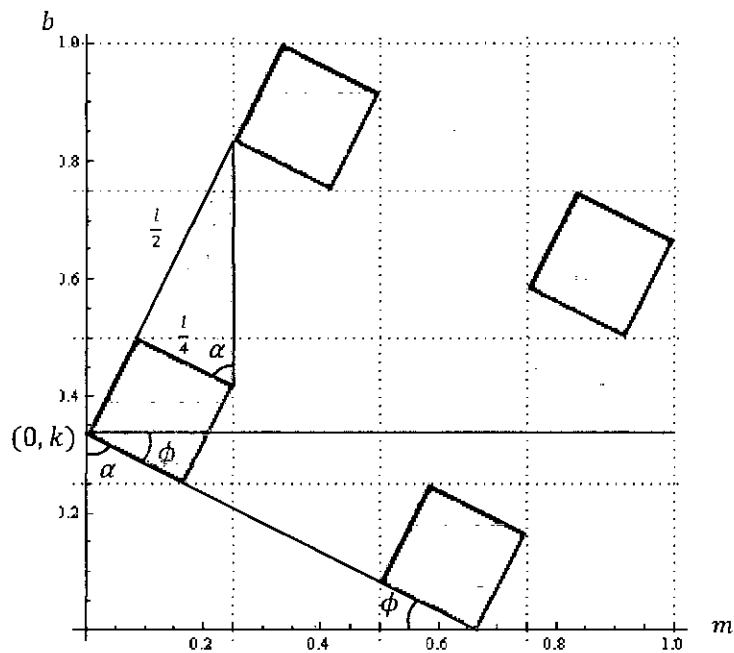
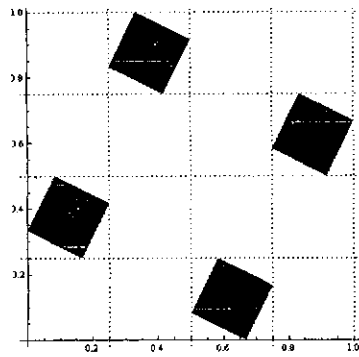
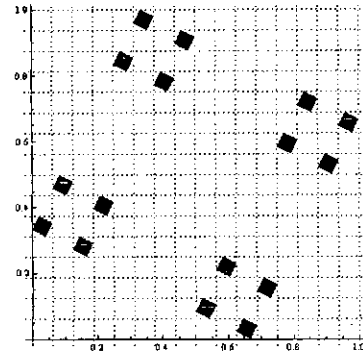


Fig. 2. 12 El conjunto \mathcal{K}_1 modificado

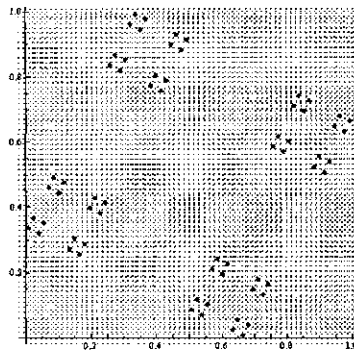
Se puede observar (figura 2.12) que para tal propósito, debe partirse de un cuadrado de lado $\frac{\sqrt{5}}{3}$, rotarlo un ángulo $\phi = \tan^{-1}(-\frac{1}{2})$ y luego trasladarlo hasta el punto $(0, \frac{1}{3})$. Los resultados se muestran en la figura 2.13.



S_1



S_2



S_3

Fig. 2. 13 Primera, segunda y tercera aproximaciones de S

En cada caso, las proyecciones ortogonales de S_i sobre el eje m cubren el intervalo $[0,1]$. Afirmamos dos cosas:

(Af. 1) La proyección de S sobre el eje m cubre a todo el intervalo $[0,1]$

Para verificar esto utilizamos el teorema 1.29. Tomemos cualquier $x \in [0,1]$. Definamos

$$I_x := \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1\}$$

$$J_n := I_x \cap S_n.$$

Dado que I_x y S_n son cerrados, J_n también lo es. Además puesto que $S_{n+1} \subset S_n$, $J_{n+1} \subset J_n$ por lo que la sucesión de compactos $\{J_n\}$ es anidada. Así pues

$$I_x \cap S = \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n \neq \emptyset$$

Esto significa que para cada $b \in [0,1]$, S contiene como mínimo un punto (m, b) .

(Af. 2) $Bu(S) = 0$

En este caso utilizamos el teorema 1.76. Comprobamos si S satisface las hipótesis de dicho teorema:

En primer lugar, S es irregular. Tomamos como direcciones a los ejes X e Y originales (es decir, tomamos a S sin rotarlo ni trasladarlo).

Las proyecciones de S sobre dichos ejes se comportan de la siguiente manera:

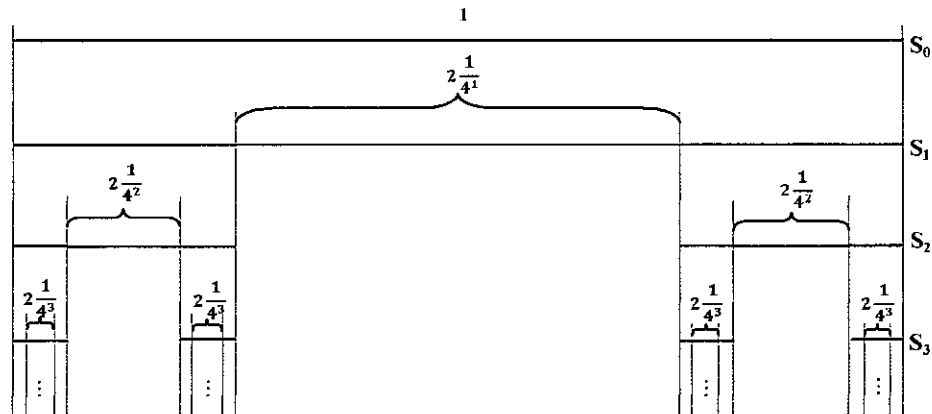


Fig. 2. 14 Proyecciones de los S_i sobre el eje X

De la figura 2.14, observamos que el complemento de S (líneas negras) tiene una longitud de:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

Dado que el intervalo de la proyección tiene longitud 1, vemos que $|S| = 0$.

En segundo lugar, $\mathcal{H}(\mathcal{K}) < \infty$ y como S se obtiene por traslación y rotación de \mathcal{K} , se deduce que también $\mathcal{H}(S) < \infty$.

Así pues, S satisface las hipótesis del teorema de proyección de Besicovitch, por lo que, según (1.14), $Bu(S) = 0$. De (2.5), $K = 0$

Un conjunto de Besicovitch construido con el método anterior se visualiza parcialmente como:

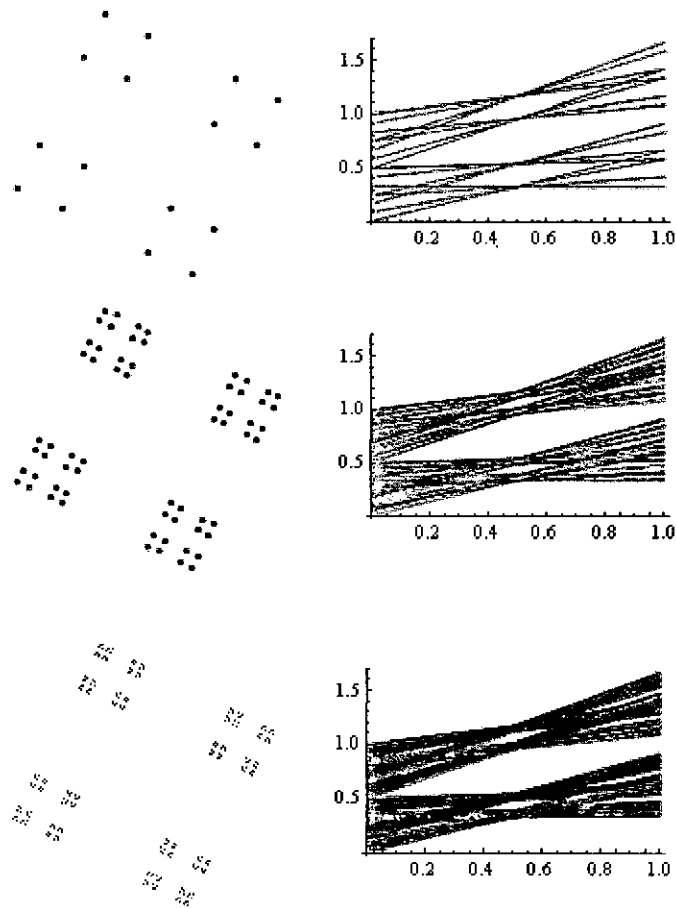


Fig. 2. 15 Generación de conjuntos de Besicovitch usando el conjunto 2 – dimensional de Cantor

2.4 El Problema de Kakeya

Al mismo tiempo que Besicovitch trabajaba en Rusia en el problema anterior, el matemático japonés Soichi Kakeya plantea en una revista japonesa de matemáticas el siguiente problema:

Problema 2 Problema de Kakeya

Encontrar el conjunto plano de área mínima en el que se puede hacer girar continuamente un segmento de longitud 1 de modo que vuelva a ocupar su posición original pero con los extremos invertidos

En adelante, al segmento de línea de longitud 1 se llamará “aguja”. En la pregunta original se pide que el conjunto sea convexo, pero de momento vamos a obviar esa restricción. Existe cierta semejanza entre los enunciados de los problemas 1 y 2 pues en el último caso el conjunto debe tener un segmento unitario en cada dirección ya que al girar continuamente la aguja, ésta tendrá que pasar por todas las direcciones.

Analicemos el problema en la figura 2.16. En todos los casos, el segmento representa a la aguja con un extremo en forma de círculo y el otro en forma de rombo. Las flechas indican la dirección del movimiento

La fig. 2.16 – a es la figura más obvia de todas: giramos la aguja alrededor de su punto medio. El conjunto obtenido es un círculo de radio 0.5 y con área $\frac{\pi}{4} \approx 0.785$.

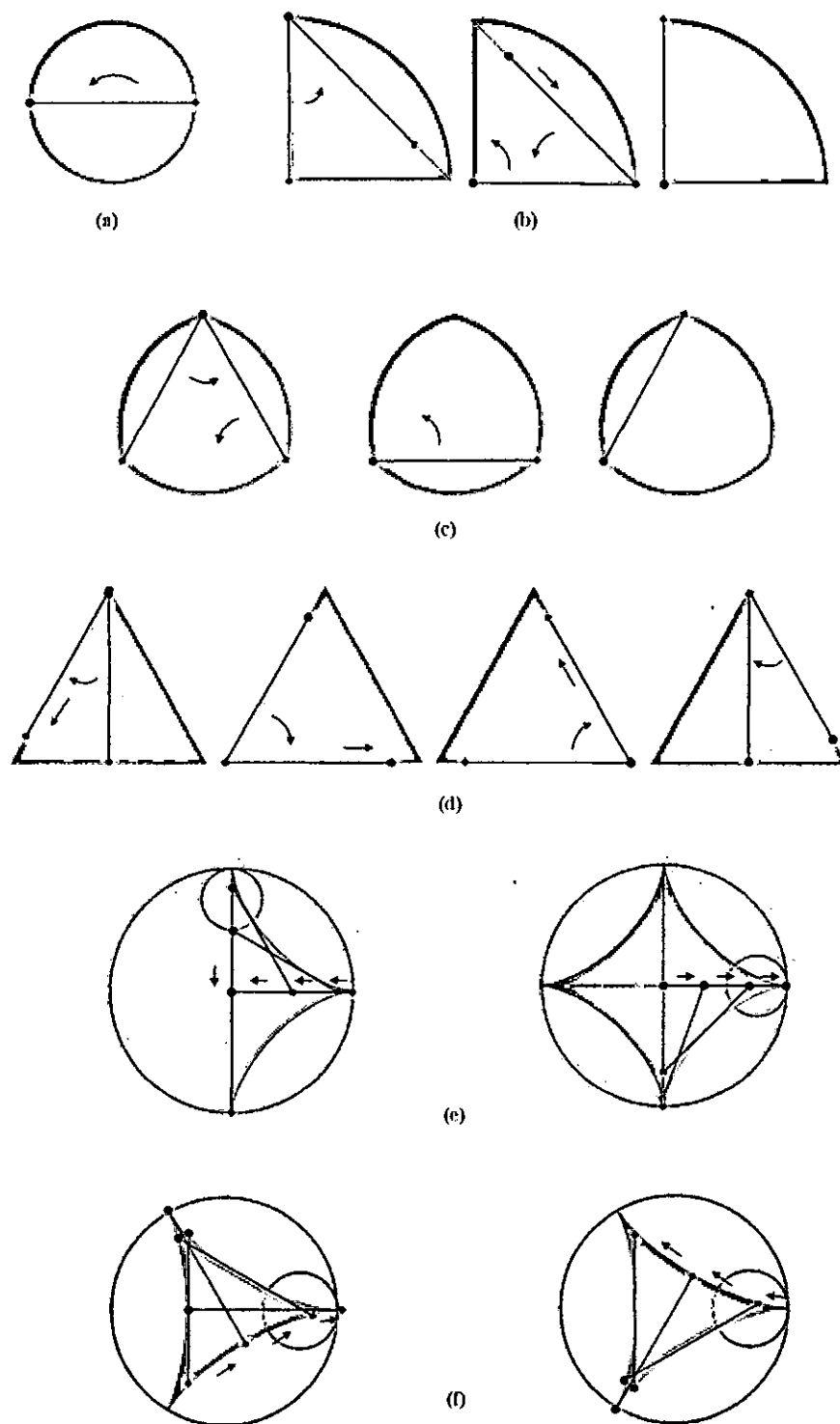


Fig. 2. 16 Algunas soluciones al problema de Kakeya

La fig. 2.16 – b corresponde a un cuarto de un círculo de radio 1. En este caso el área coincide con la del conjunto de la fig. 2.16 – a.

Para obtener la fig. 2.16 – c, se ha colocado tres arcos de circunferencia de 60° cada uno. Las circunferencias son de radio 1. El área obtenida es $\frac{\pi - \sqrt{3}}{2} \approx 0.7047709$, reduciendo así el tamaño del conjunto.

Una variante del conjunto anterior se observa en la fig.2.16 – d: un triángulo equilátero de altura 1 cuya área es $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.5773502$, la cual es menor que las obtenidas anteriormente.

En el conjunto mostrado en la fig.2.16 – e, el cual no es convexo, movemos la aguja sobre la mitad de un astroide (cuya ecuación es $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$). El área correspondiente es $\frac{3\pi}{16} \approx 0.5890486$. Esta área no es menor que la del triángulo de la fig.2.16 – d, pero la construcción puede ser mejorada.

El astroide es una hipocicloide, un tipo de trocoide (ver sub sección 1.1.6). Dentro de las hipocicloides, la deltoide se destaca por la propiedad de que el segmento de tangente entre cualquiera de sus puntos tiene longitud constante. Haciendo $a = \frac{3}{4}$ en la definición 1.64, se obtiene un área de $\frac{\pi}{8} \approx 0.392699...$ un resultado mucho mejor que los anteriores ².

Se conjeturó que este resultado era el óptimo. Sin embargo, Besicovitch demostró un resultado inesperado.

² El artículo de Kakeya conjeturaba que el triángulo equilátero de altura 1 de la fig.2.15 – d era la respuesta al problema para conjuntos convexos, lo cual fue confirmado por Juliüs Pál en 1921. Sin embargo el problema para conjuntos no convexos quedaba aún abierto.

2.5 Solución del Problema de Kakeya

Es muy probable que durante su estancia en Europa, Besicovitch llegara a saber del problema de Kakeya. Utilizando la construcción que resolvía el problema 1, dio una respuesta definitiva al problema de Kakeya.

Lema 2.7 Conexión de Pál

Sean L_1 y L_2 dos líneas paralelas en el plano. Dado $\epsilon > 0$, existe un conjunto compacto E con $|E| < \epsilon$ sobre el cual una aguja puede ser movida continuamente desde L_1 hacia L_2 .

Demostración

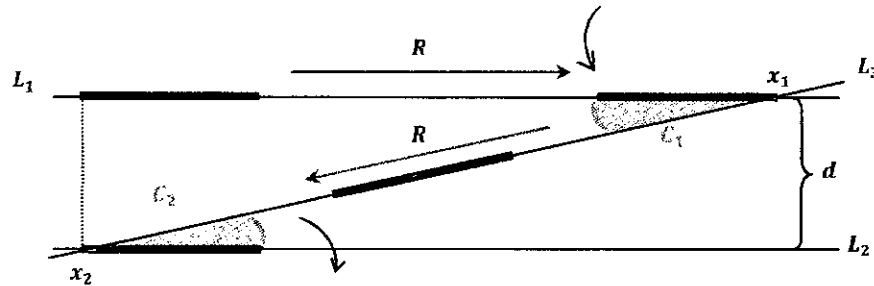


Fig. 2. 17 Conexión de Pál (la aguja está representada por el segmento rojo)

Sea $x_1 \in L_1$ y d la distancia entre L_1 y L_2 . Tomamos $x_2 \in L_2$ a una distancia R de la proyección de x_1 sobre L_2 , tal que

$$R > \frac{d}{\tan(\pi\epsilon)}$$

Se gira la aguja alrededor de x_1 un ángulo $\epsilon \leq \frac{1}{R}$, y se traslada sobre L_3 hasta que su extremo coincida con x_2 . Se vuelve a hacer el giro por el mismo ángulo hasta que la aguja esté sobre L_2 . Esto genera dos sectores circulares congruentes C_1 y C_2 de radio 1 y de ángulo central

$\tan^{-1}\left(\frac{d}{R}\right) < \epsilon\pi$, de manera que el área total empleada es $\frac{\epsilon}{2}$, la cual se puede hacer tan pequeña como se quiera haciendo R lo suficientemente grande. Denotando por M al segmento de L_3 comprendido entre x_1 y x_2 , el conjunto $E := M \cup C_1 \cup C_2$ es el que indica el lema.



La construcción del teorema 2.7 se llama *conexión de Pál*,

Teorema 2.8 (Prueba de Besicovitch – Perrón)

Para cualquier $\epsilon > 0$ existe una región del plano de área menor que ϵ dentro de la cual una aguja puede ser rotada 180° grados.

Demostración

Sea $\epsilon > 0$ y un triángulo rectángulo isósceles de altura 1 (puede ser otro también). Empezamos construyendo un árbol de Perron de área menor que $\frac{\epsilon}{2}$ (Teorema 2.4). Esta construcción divide al triángulo original en M trozos, que han quedado desplazados entre sí.

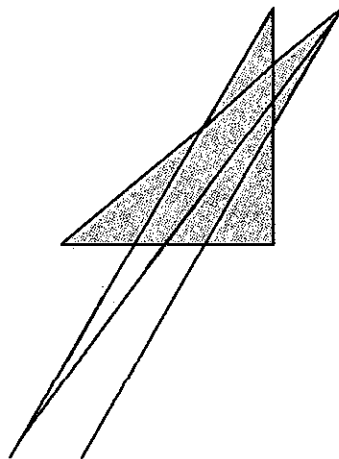


Fig. 2. 18 Conexión de Pál entre dos triángulos
adyacentes en un árbol de Perron

Como triángulos adyacentes tienen dos lados opuestos paralelos, colocamos $M - 1$ conexiones de Pàl, cada una con área menor que $\frac{\epsilon}{2M}$. Como son $M - 1$ conexiones, el área de todas éstas es menor que $\frac{\epsilon}{2M} (M - 1) < \frac{\epsilon}{2}$. Así pues el área total es menor que ϵ . Tomamos cuatro copias del conjunto anterior y las rotamos cada 90° . El conjunto obtenido es la solución al problema de Kakeya



Esta solución presenta una dificultad: el conjunto de Kakeya resultante tiene diámetro muy largo. Esto se debe a las conexiones de Pàl usadas deben ser lo suficientemente largas para que su área sea tan pequeña como se quiera ³. El siguiente resultado debido a F. Cunningham elimina de manera óptima esta dificultad.

Teorema 2.9: *Dado $\epsilon > 0$, (a) existe un conjunto de Kakeya de área menor que ϵ contenido en un círculo de radio 1; (b) Este conjunto es simplemente conexo. Además (c) tal conjunto no puede construirse dentro de un círculo de radio menor.*

A diferencia de los conjuntos de Kakeya contruidos por el método de Besicovitch – Perron, en la construcción de Cunningham no sólo interesa las direcciones de las líneas sino también la posición de la línea en la cual está la aguja.

³ En 1941, A. H van Alphen muestra que un conjunto de Kakeya puede tener área arbitrariamente pequeña y permanecer dentro de un círculo de radio $2 + \epsilon$ ($\epsilon > 0$), eliminando así el problema de acotación de los conjuntos de Kakeya.

Los ejemplos que se construyen siguiendo la prueba del teorema 2.9 parecen conjuntos arañados en el siguiente sentido: en el centro está un pequeño núcleo convexo Π desde el cual irradia un gran número de triángulos en diferentes direcciones. La aguja gira un poco en uno de dichos triángulos, entonces se desliza a través del núcleo hacia el triángulo opuesto, para girar allí un poco más y así sucesivamente.

La demostración se realiza mediante una sucesión de construcciones, donde cada una reemplaza un conjunto de Kakeya por otro de área más pequeña teniendo el debido cuidado de preservar la condición de ser simplemente conexo. En estos reemplazos únicamente son cambiados los triángulos irradiados, no el núcleo.

Exponemos las definiciones y resultados que se utilizan en la demostración el teorema 2.9.

Definición 2.10 Brotamiento de un triángulo

Es una transformación que partiendo de un triángulo da como resultado una unión de dos triángulos. Esto se logra por medio de prolongar dos lados del triángulo base hasta interceptar a una línea, la línea de brote, no secante al triángulo, paralela al tercer lado y que se encuentre en el mismo lado del triángulo con respecto a la línea que contiene al tercer lado. Al conjunto resultante del brotamiento se le denomina árbol.

Este procedimiento, conocido como "**brotamiento**" es ilustrado en la figura 2.19.

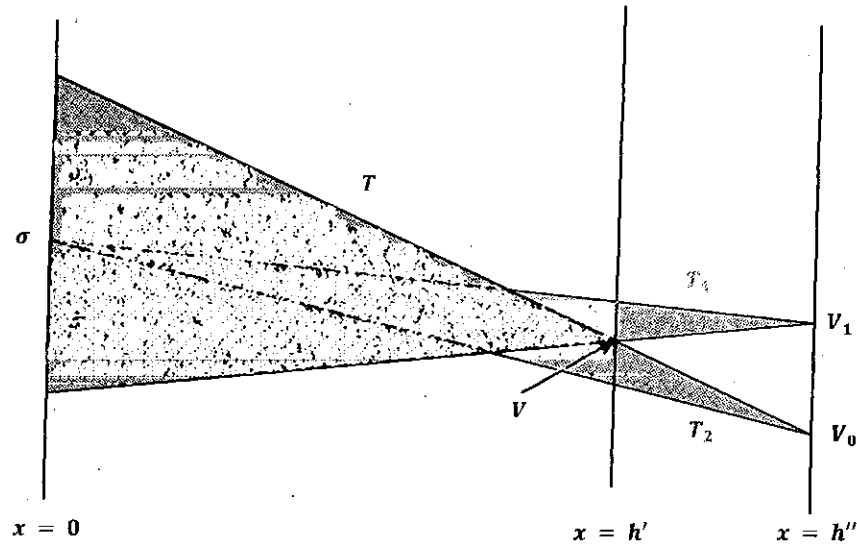


Fig. 2. 19 Brotamiento de un triángulo

Sea $0 < h' < h''$, y sea T un triángulo con vértice V sobre $x = h'$ y con base σ sobre el eje Y . "Brotar" el triángulo T significa reemplazarlo por $T_0 \cup T_1$, donde T_0 y T_1 son triángulos cuyas bases, sobre el eje Y , son las mitades σ_0 y σ_1 más alta y más baja respectivamente de σ , y sus vértices son los puntos V_0 y V_1 sobre $x = h''$ determinados al extender el lado más alto y el más bajo, respectivamente, de T .

Con respecto al triángulo inicial, existe un incremento en el área de T como resultado de hacerlo brotar (fig. 2.20). Este incremento es la unión de dos triángulos que están contenidos en una franja vertical de ancho horizontal $2(h'' - h')$, y cada uno tiene una altura en $x = h'$ menor que $|V_0V_1|$. Podemos calcular $|V_0V_1|$ al usar la semejanza de los triángulos de

color blanco que aparecen en la figura 2.20. Estableciendo la proporción base – altura tenemos:

$$\frac{\sigma}{|V_0V_1|} = \frac{h'}{h'' - h'}$$

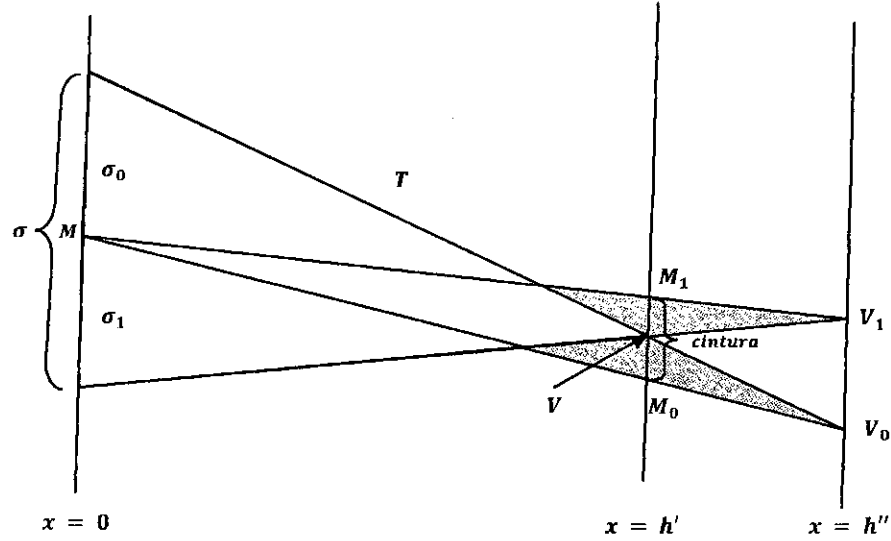


Fig. 2. 20 Incremento en el área de un triángulo después de brotarlo

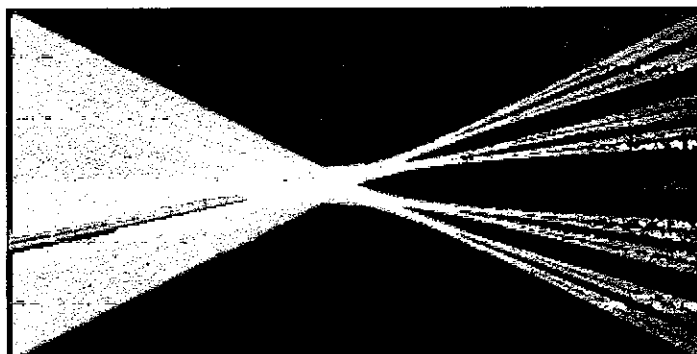
De donde $|V_0V_1| = \sigma \frac{h'' - h'}{h'}$. Por lo que el incremento en el área es menor que

$$2\sigma \frac{(h'' - h')^2}{h'} \quad (2.6)$$

Definición 2.11 Árbol de orden p

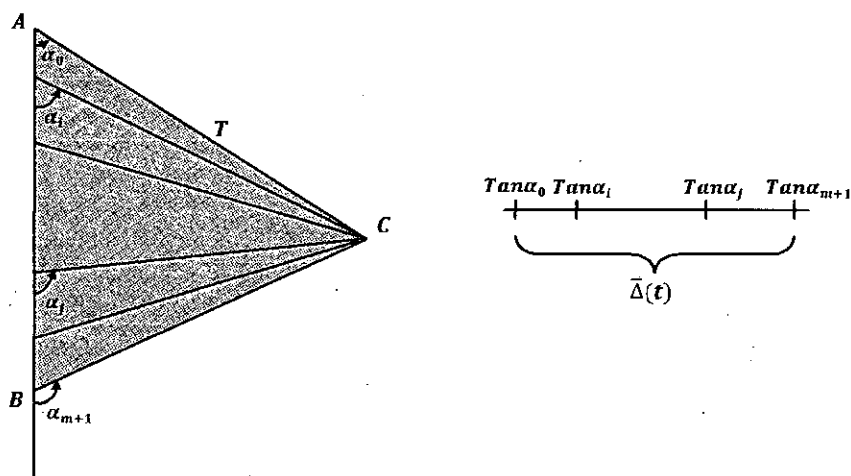
Sea T un triángulo. Para cada entero positivo p existe un árbol T_p , el cual "brota" de T , que se construye al repetir p veces la técnica del brotamiento. T_p es el árbol de orden p en T .

La figura 2.21 muestra al árbol T_8 que brota a partir del triángulo $T = \{\{0,2\}, \{2,1\}, \{0,0\}\}$.

Fig. 2.21 T_8

Definición 2.12 Intervalo de Pendientes de un triángulo

Si T es cualquier triángulo con un lado vertical, denotamos por $\bar{\Delta}(T)$ al conjunto de números reales que representan a las pendientes de las líneas que unen el vértice restante con el lado vertical (fig. 2.22). El ángulo es tomado a partir del lado vertical y en sentido anti horario. $\bar{\Delta}(t)$ es el **intervalo de pendientes** de T .

Fig. 2.22 $\bar{\Delta}(T)$

Demostración del teorema 2.9 – (a)

Primera aproximación

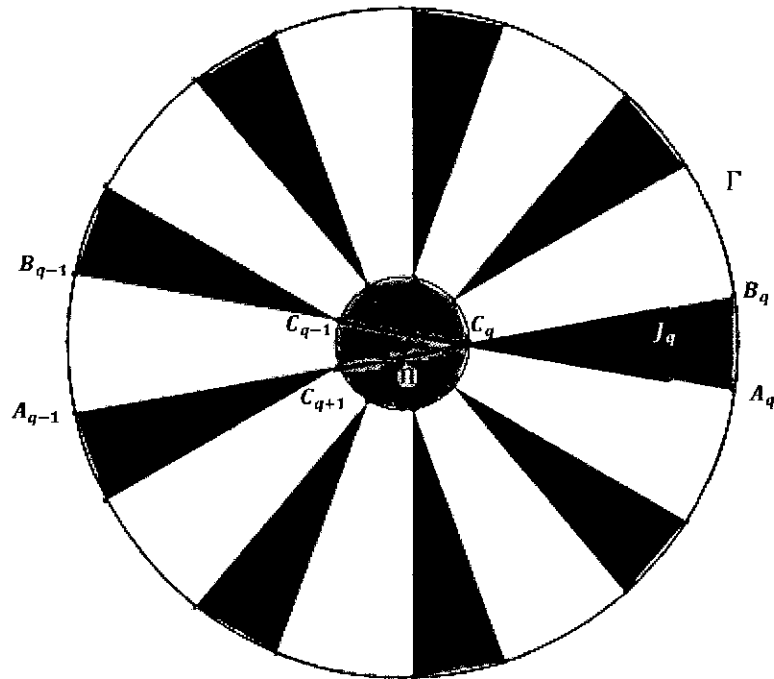


Fig. 2. 23 Primera aproximación de Cunningham ($Q = 9$)

El punto de partida es el conjunto de Kakeya mostrado en la figura 2.23 ($Q = 9$. La aguja está representada por el segmento rojo).

Sea Γ un círculo unitario fijo. Tomemos $\epsilon > 0$, sea Π la región acotada por un polígono regular concéntrico con Γ inscrito en una circunferencia de radio $\sqrt{\frac{\epsilon}{2\pi}}$. Denotemos por Q a su número de lados. Por conveniencia, tomemos Q impar. Si Q es lo suficientemente grande, Π se aproximará a su circunferencia circunscrita y por lo tanto su área será menor que $\frac{\epsilon}{2}$.

Numeramos los vértices de Π como $C_0, C_1, \dots, C_Q = C_0$ (figura 2.24: $C_i = C1[i]$) de tal manera que esos vértices sucesivos sean casi

opuestos al otro. El ángulo en el sentido de las agujas del reloj desde C_{q-1} a C_q es $\frac{\pi}{Q}$ para cada q en $\{1, \dots, Q\}$.

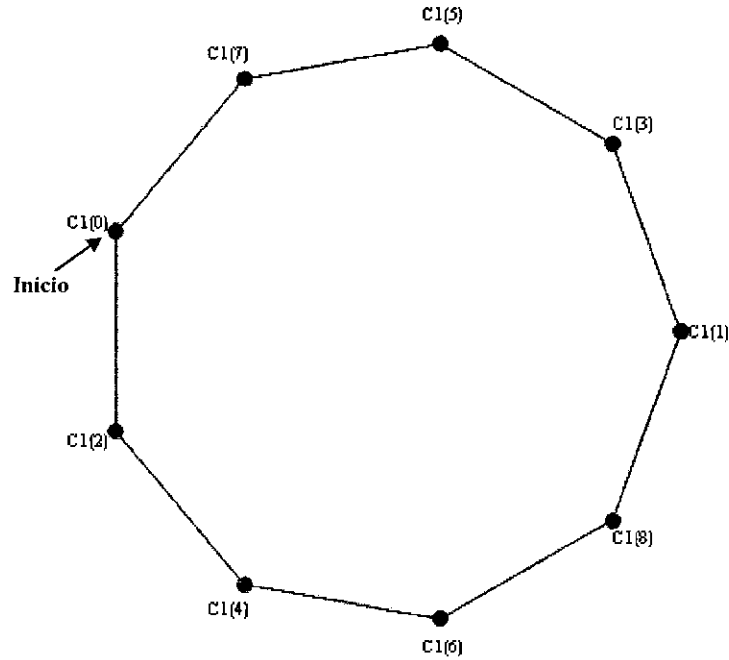


Fig. 2. 24 Numeración de los vértices de Π ($Q = 9$)

Ahora construimos Q triángulos J_1, \dots, J_Q (ver figura 2.23). J_q tiene a C_q como un vértice, los otros dos vértices A_q y B_q son los puntos de Γ determinados al extender $C_{q-1}C_q$ y $C_{q+1}C_q$ respectivamente. El conjunto K que nos interesa es la unión de la región poligonal Π y las regiones triangulares J_1, \dots, J_Q . Este conjunto es obviamente simplemente conexo y contenido en Γ .

La aguja se mueve en K desde un segmento $C_{q-1}C_qA_q$ hasta $C_{q+1}C_qB_q$ al pivotar alrededor de C_q . Para que esto sea posible se necesita únicamente que la distancia perpendicular entre las líneas paralelas $C_{q-1}C_{q+1}$ y A_qB_q sea como mínimo 1. Esto se logra haciendo Q lo suficientemente grande pues no importa cuán pequeño sea ϵ , cuando

$Q \rightarrow \infty$, Π se aproxima a un círculo de área $\frac{\epsilon}{2}$, es decir de radio $\sqrt{\frac{\epsilon}{2\pi}}$, y tal

que la distancia en cuestión tiende a $1 + \sqrt{\frac{\epsilon}{2\pi}} > 1$ como límite). Cuando

esta condición es satisfecha, K es un conjunto de Kakeya.

La aguja gira sobre K de la siguiente manera:

Empezamos, por ejemplo, sobre el segmento $C_0C_1A_1$, giramos alrededor de C_1 hasta llegar a $C_2C_1B_1$; entonces la deslizamos a lo largo de esta línea hasta estar sobre $A_2C_2C_1$; entonces giramos sobre C_2 hasta llegar a $B_2C_2C_3$, entonces lo deslizamos a lo largo de $C_2C_3A_3$; y así sucesivamente. Después de repetir el proceso Q veces, los índices estarán cambiados, esto es, regresa $A_1C_1C_0$. Así pues, la aguja llega con la dirección invertida, si Q es impar.

Como Q es impar, el número de triángulos J_q es igual al número de espacios entre ellos (fig. 2.25). Dado que la suma de las áreas de los J_q más el área de los espacios entre ellos es igual a π entonces para un Q lo suficientemente grande y un ϵ pequeño, el área de los espacios entre los triángulos será aproximadamente igual a la de aquellos por lo que el área de K es aproximadamente $\frac{\pi}{2}$ (No olvidemos que Π ya tiene un área tan pequeña como se quiera). Este resultado puede ser mejorado.

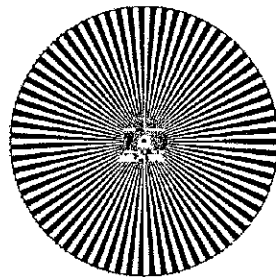


Fig. 2. 25 Conjunto K para $Q = 71$ y
 $\epsilon = 0.00025$

Segunda Aproximación

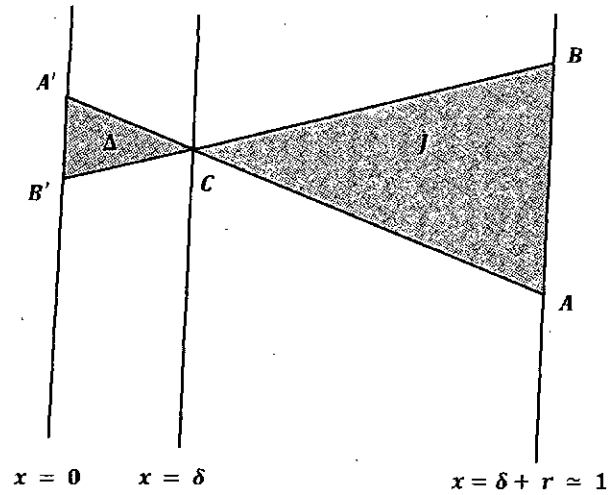


Fig. 2. 26 El conjunto $K^{(0)}$: Una simplificación de J_q (el sub índice q ha sido omitido)

En la figura 2.26 se muestra, con notación simplificada, la parte de la figura 2.23 relevante para lograr esta mejora. Aquí C_{q-1} y C_{q+1} se denotan por A' y B' y todos los subíndices que envuelven q han sido omitidos. Se ha colocado un sistema de coordenadas y como se muestra, el eje X ha sido omitido, pues es innecesario. El triángulo más pequeño Δ con vértices $A'B'C$ es parte del núcleo poligonal Π y a su altura (horizontal) la denotaremos por δ . El triángulo más grande J con vértices ABC tiene altura r tal que $\delta + r \approx 1$, aunque podemos considerar $\delta + r = 1$ si tomamos a Q lo suficientemente grande.

El objetivo es reemplazar el movimiento obvio de la aguja desde $A'A$ hacia $B'B$ en $K = K^{(0)} = \Delta \cup J$ (a saber, girando en torno a C) por un mecanismo que usa un área menor. Se conserva Δ , el cual es ya aceptablemente pequeño, pero se deshace la mayoría de J . La

construcción consiste en una sucesión de reemplazos, de los cuales se describe sólo el primero. Esto se muestra en la figura 2.27.

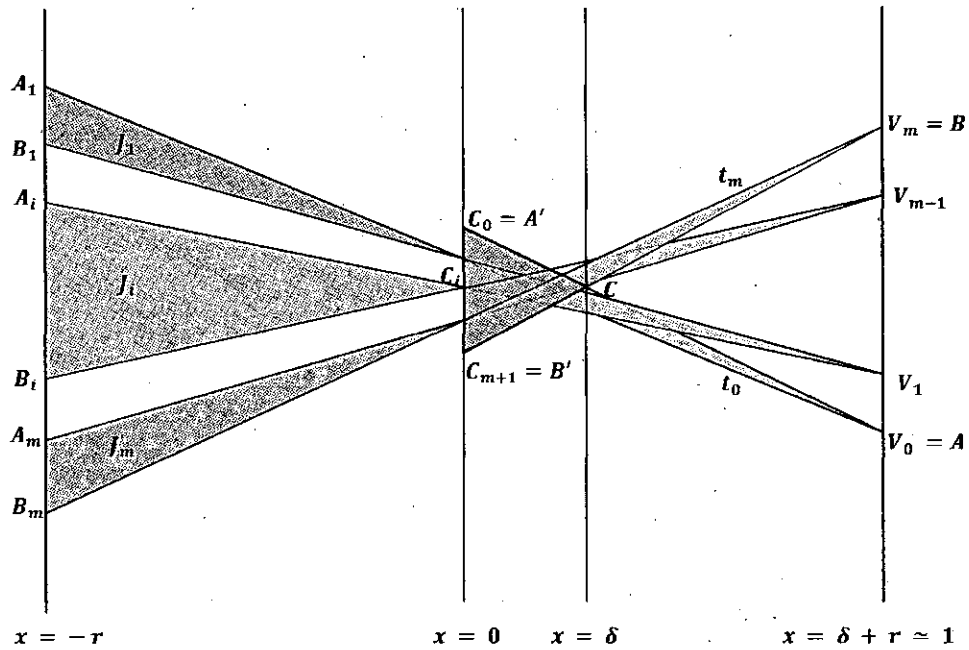


Fig. 2.27 Construcción de $K^{(1)}$

La nueva figura consiste de un árbol T (la parte en el semiplano $x \geq 0$) y una unión de coyunturas o "raíces" (los triángulos en el semiplano $x \leq 0$).

En términos generales, T es construido de la siguiente manera:

Para algún entero positivo m elegimos m distintos puntos C_1, \dots, C_m , sobre el eje Y , en orden descendiente y estrictamente entre A' y B' .

Adicionalmente, tomamos $m - 1$ puntos distintos en orden ascendente estrictamente entre A y B sobre la línea $x = \delta + r \approx 1$. Para completar

la notación, ponemos $C_0 = A'$, $C_{m+1} = B'$, $V_0 = A$ y $V_m = B$. El árbol T es la unión de los $m + 1$ triángulos t_i con vértices $C_i V_i C_{i+1}$ para $i = 0, \dots, m$.

Las raíces de T son los m triángulos J_1, \dots, J_m , donde J_i tiene por vértices C_i y los puntos A_i y B_i sobre la línea vertical $x = -r$ obtenidos al extender hacia atrás los segmentos $C_i V_{i-1}$ y $C_i V_i$ los cuales son los lados de dos triángulos adyacentes t_{i-1} y t_i de el árbol T (no olvidemos que $r \rightarrow 1$). Sea

$$K^{(1)} = T \cup \bigcup_{i=1}^m J_i$$

$K^{(1)}$ es llamado el *primer reemplazo* de $K^{(0)}$.

Al igual que $K^{(0)}$ es un conjunto de *Kekeya* parcial, esperamos que $K^{(1)}$ también lo sea, es decir, que en $K^{(1)}$ la aguja puede moverse desde $A'A$ hasta $B'B$. Esto se hace como sigue:

Empezando en $A'A = C_0 V_0$ giramos en t_0 en torno a V_0 hasta estar en $C_1 V_0$; entonces lo deslizamos a través de la línea hasta estar entre $x = 1 - r$ y $x = \delta$; entonces giramos en $\Delta \cup J_1$ en torno a C_1 hasta estar en $B_1 C_1 V_1$; luego la desplazamos hasta estar entre $x = 0$ y $x = 1$; a continuación giramos en torno a V_1 en t_1 hasta estar sobre $C_2 V_1$; y así sucesivamente hasta que llegue a $C_{m+1} V_m$, el cual es $B'B$.

Afirmamos que el área de $K^{(1)}$ es menor que el área de $K^{(0)}$. Para demostrarlo, vamos a computar primero el área total de todas las raíces.

Para cada $i = 1, \dots, m$ tenemos que $J_i \sim \Delta V_{i-1} C_i V_i$. Formando la proporción base – altura (horizontal) se sigue que:

$$\frac{|A_i B_i|}{|V_{i-1} V_i|} = \frac{r}{r + \delta}$$

Tomando Q suficientemente grande tenemos:

$$\frac{|A_i B_i|}{|V_{i-1} V_i|} = \frac{r}{1}$$

Así pues $|A_i B_i| = r|V_{i-1} V_i|$. Entonces

$$\sum_{i=1}^m |A_i B_i| = \sum_{i=1}^m r|V_{i-1} V_i| = r|AB|$$

$$\therefore \sum_{i=1}^m |J_i| = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} r |A_i B_i| = \frac{1}{2} r^2 |AB| = r|J| \quad (2.7)$$

, para Q suficientemente grande. Por lo tanto concluimos que la contribución de las áreas de las raíces J_i al área de $K^{(1)}$ es menor que la contribución de J al área de $K^{(0)}$ (recordemos que $r < 1$). Nos falta comparar el área de T con la de Δ , y esto requiere más detalles específicos de cómo se construye T .

En primer lugar, debe recordarse que T contiene a Δ . Mostraremos que el área de T puede ser construida de tal manera excede a la de Δ por una cantidad arbitrariamente pequeña. Para hacerlo, se usa la solución de Besicovitch en una forma modificada. A diferencia de los árboles de Besicovitch – Perron (B – P) del teorema 2.4, en los cuales los triángulos elementales vecinos tienen un lado casi paralelo el uno al otro haciendo que las conexiones de P al que los conectan sean necesariamente muy largas, los árboles usados por Cunningham son trazados intencionadamente para que los triángulos elementales vecinos se intercepten con raíces que tienen sus vértices derechos sobre el eje Y .

Detallemos la construcción de T . Sea $p \in \mathbb{N}$. Construimos el árbol de orden p en Δ , al que denotaremos por T_p , de la siguiente manera:

Dividimos el intervalo $[\delta, \delta + r]$ ($[\delta, 1]$ si Q es suficientemente grande) en p partes iguales. Así se generan los puntos h_1, h_2, \dots, h_{p-1} entre $\delta = h_0$ y $\delta + r = h_p$, los cuales satisfacen: $h_i - h_{i-1} = \frac{r}{p}$ para $i = 1, \dots, p$.

A continuación hacemos brotar el triángulo Δ desde h_0 hacia h_1 para producir dos triángulos; brotamos ambos desde h_1 hacia h_2 para producir cuatro triángulos, y así sucesivamente. La unión de los 2^p triángulos t_i , $i = 1, \dots, p$, que se consiguen de los p brotes sucesivos es T_p .

El caso $p = 4$ es mostrado en la figura 2.28.

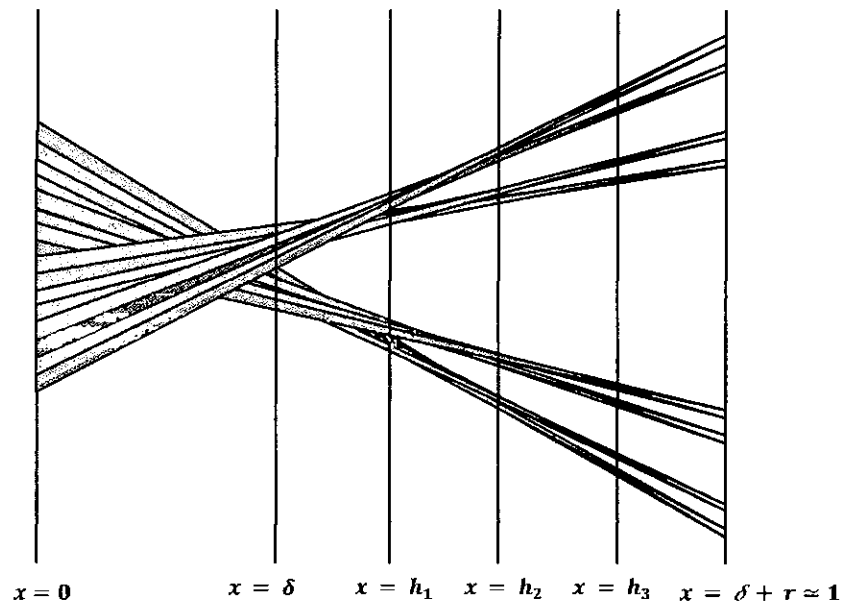


Fig. 2. 28 T_4 : El brotamiento de Δ para $p = 4$

Afirmamos que T_p es un caso especial del árbol T construido como en la figura 2.27. Para demostrarlo haremos uso de un sistema de índices binarios para los triángulos que construyamos con la técnica del brotamiento. Cada vez que hacemos brotar a un triángulo, a cada uno de los dos nuevos que se forman a partir de él les vamos a asociar los

sub índices 0 y 1 en el orden en que aparecen en la definición de “brotamiento”, es decir, asociaremos el sub índice 1 para el triángulo que brota en la parte superior y 0 para el que lo hace en la parte inferior.

Empezamos con $t = \Delta$ (sin subíndice). La secuencia es la siguiente (en cada caso el triángulo formado a la izquierda corresponde al triángulo inferior y por tanto el que aparece a la derecha corresponde al superior):

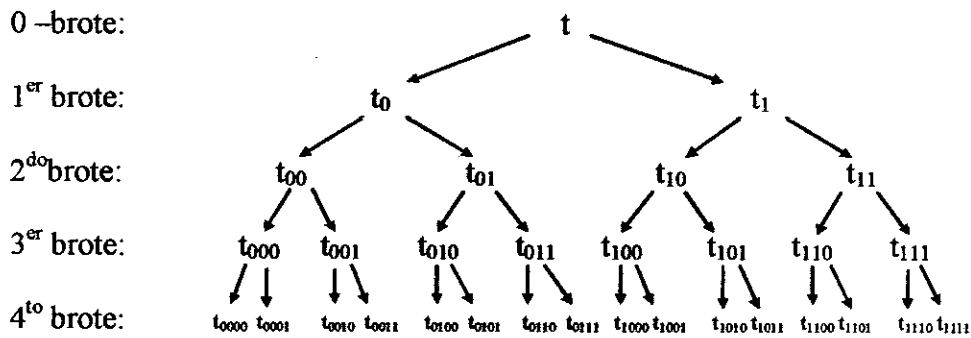


Fig. 2. 29 Árboles generados con el brotamiento (La generación i corresponde al $i - 1$ brote)

...y así sucesivamente.

Después de p brotes, cada triángulo elemental de T_p es representado por t junto con una cadena de p subíndices formada por ceros y unos de la forma:

$$I^i = \sum_{j=1}^p a_j^i 2^{p-j} ; a_j^i \in \{0,1\}$$

donde el símbolo I^i representa el i - ésimo sub índice que ocupa la posición i contado de izquierda a derecha. Por lo tanto cada uno de

estos sub índices obtenidos en el p – ésimo brote es la representación binaria de uno de los enteros $0, 1, \dots, m = 2^p - 1$.

Cuando escribimos la cadena de subíndices para indicar estos enteros observamos que al considerar I^i junto a I^{i+1} vemos que pueden ocurrir dos casos:

El primero es que ambos provengan de un mismo triángulo elemental t , en este caso

$$a_j^i = a_j^{i+1} \quad , \quad 1 \leq j \leq p-1$$

Mientras que:

$$a_p^i = 0 \text{ mientras que } a_p^{i+1} = 1$$

Por lo tanto I^i y I^{i+1} son consecutivos.

El otro caso ocurre cuando uno es el último de la derecha de un triángulo elemental mientras que el otro es el primero de la derecha del siguiente triángulo. En este caso siempre terminan en 01 y 10 respectivamente y el resto de la cadena es la misma. Pero esto equivale a decir que la diferencia entre ambos números es 1 pues $\overline{01}_2 = 1$ y $\overline{10}_2 = 2$ con lo cual estos dígitos siguen siendo consecutivos. Es más, en ambos casos están ordenados en forma creciente, de izquierda a derecha.

Por consiguiente los $m + 1 = 2^p$ vértices V_0, \dots, V_{m+1} sobre $x = \delta + r$ de los triángulos elementales están numerados en forma ascendente tal como se esperaba, y por lo tanto sus bases $\sigma_0, \dots, \sigma_m$ sobre el eje Y , que son los segmentos de la partición de $A'B'$ en 2^p partes iguales, están numeradas en orden descendente. Si asociamos a los extremos de tales

segmentos los símbolos C_1, \dots, C_m obtenemos de nuevo el árbol T de la figura 2.27.

Hallar el área de T_p es más complicado que hallar la de los árboles $B - P$, por lo que sólo haremos una estimación superior. No vamos a calcular $|\Delta|$, ya que Δ es parte de $K^{(0)}$, sino únicamente el incremento causado por el brotamiento de T_p desde Δ . En la k -ésima etapa 2^{k-1} triángulos brotan simultáneamente para formar 2^k triángulos y en esta etapa, para cada uno de aquellos $\sigma = 2^{-(k-1)}|A'B'|$, $h'' - h' = \frac{r}{p}$ y $h' \geq \delta$.

Por (2.6) todos los brotamientos de esta etapa contribuyen con un área menor que $2^{k-1} \left(2(2^{-(k-1)}|A'B'|) \frac{(r/p)^2}{\delta} \right) = 2|A'B'| \frac{r^2}{\delta p^2}$.

Adicionando las contribuciones de todas las etapas, p en total, vemos que la contribución total está dada por:

$$|T_p| - |\Delta| = \sum_{k=1}^p 2|A'B'| \frac{r^2}{\delta p^2} = 2|A'B'| \frac{r^2}{\delta p}$$

Esto tiende a cero cuando p es grande, es decir, $|T_p| \rightarrow |\Delta|$.

Remarcamos que $|A'B'| = |AB| \frac{\delta}{r}$ y que el área de J es $|J| = \frac{1}{2} r |AB|$, así que nuestra estimación puede ser expresada como

$$|T_p| - |\Delta| = 4 \frac{|J|}{p} \quad (2.8)$$

Una propiedad descriptiva de T_p , para p suficientemente grande, la cual será útil después, es que tiene "cintura" muy delgada. Por la "cintura" de T_p nos referimos al segmento de la línea vertical $x = \delta$ que es igual a la intersección de esta línea con T_p (fig. 2.20). El mayor y menor extremos

de este segmento son determinados por el primer brotamiento de Δ y permanece igual mientras T_p crece y por consiguiente es fácilmente calculable. Estableciendo la proporción base – altura de los triángulos semejantes V_1MV_0 y M_1MM_0 de la figura 2.20, vemos que la cintura mide $|A'B'| \frac{\delta}{p\delta+r}$. Para δ fijo, esto también tiende a cero cuando p aumenta.

Mejora adicional

Los resultados anteriores muestran que sin renunciar a ser simplemente conexo o a la propiedad de ser un conjunto parcial deakeya, el conjunto $K^{(0)}$ mostrado en la figura 2.26 puede ser reemplazado por un conjunto $K^{(1)}$ tal como se muestra en la figura 2.27 (usando un árbol T_p de índice p lo suficientemente grande) de manera que el área de $K^{(1)}$ sea ligeramente menor que la de $K^{(0)}$. Más precisamente, el pequeño triángulo Δ aún se conserva, pero el área externa ha sido reducida por un factor $r < 1$. Ahora, la mayor parte del área de $K^{(1)}$ reside en las raíces J_1, \dots, J_m . El siguiente paso es reducir el área aún más al repetir la misma construcción pero a cada J_i .

De hecho, podemos repetir el argumento anterior con sólo los siguientes dos cambios: la adición del sub índice i a cada letra que aparece en dicho argumento, y reemplazar $X - Y$ por un nuevo sistema de coordenadas dado por:

$$\begin{aligned}x' &= -x + \delta \\y' &= -y\end{aligned}$$

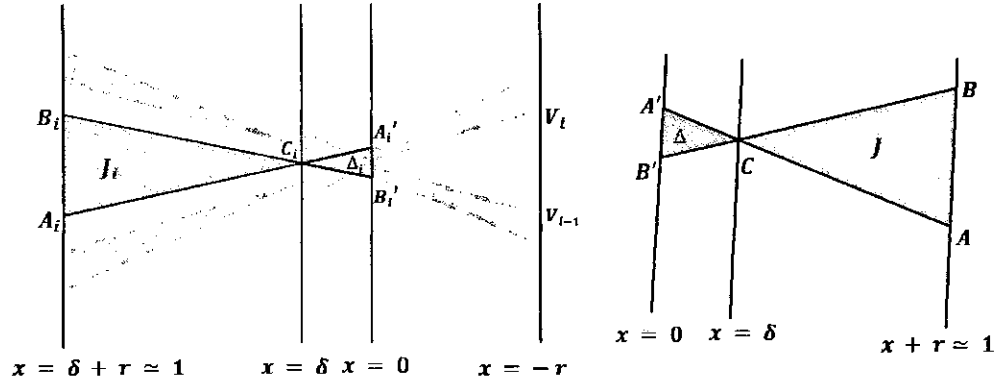


Fig. 2.30 Cambio de coordenadas

Esto coloca a J_i en la posición mostrada para J en la figura 2.26 (fig. 2.30: la fig. 2.26 está a la izquierda y la fig. 2.27 a la derecha. Se ha resaltado sólo a J_i y las abscisas de las rectas han sido afectadas por el cambio de coordenadas). Los puntos A_i' y B_i' corresponden a A' y B' en la figura 2.26 y aunque no se muestran en la figura 2.27 son obtenidos al extender $A_i C_i$ y $B_i C_i$ hasta que intercepten al eje Y , el cual anteriormente era $x = \delta$. Por lo tanto A_i' y B_i' están en la cintura de T de manera que el triángulo $\Delta_i = A_i' B_i' C_i$, el cual corresponde a Δ en la figura 2.26, está contenido en T .

Aplicando la construcción descrita anteriormente y volviendo a los ejes originales nuevamente, resulta que a J_i lo reemplazamos por un árbol T_i extendido desde $x = \delta$ hasta $x = -r$ y una nueva colección de raíces J_{i1}, \dots, J_{im_i} extendiéndose desde $x = \delta$ hasta $x = \delta + r \approx 1$. Esto es hecho para cada $i = 1, \dots, m$ y nuestro nuevo conjunto parcial de Kakeya $K^{(2)}$ es el conjunto

$$K^{(2)} := T \cup \bigcup_{i=1}^m \left(T_i \cup \bigcup_{j=1}^{m_i} J_{ij} \right)$$

El movimiento de la aguja es igual al que fue descrito para $K^{(1)}$ excepto que para ir de $A_i C_i A_i'$ hacia $B_i C_i B_i'$ ya no basta simplemente girar alrededor de C_i sino más bien realizar el movimiento que se describe para $K^{(1)}$, usando los triángulos elementales de T_i y las raíces J_{ij} alternadamente por turnos.

En lo que concierne al área de $K^{(2)} \setminus \Delta$ tenemos de (2.7):

$$\sum_{i,j=1}^m |J_{i,j}| = \sum_{i=1}^m r |J_i| = r^2 |J|$$

Como el área total de todos los nuevos árboles T_i puede ser arbitrariamente pequeña, concluimos que el área de $K^{(2)} \setminus \Delta$ puede ser tan cercana por exceso a $r^2 |J|$ como se desee.

Si iteramos este proceso N veces, observamos que en cada iteración, el área de $K^{(N)} \setminus \Delta$ puede hacerse tan cercana por exceso a $r^N |J|$ como se desee. Por consiguiente, dado un $\epsilon > 0$ y un conjunto de Kakeya parcial $K = K^{(0)}$ como el que se muestra en la fig.2.25, existe un conjunto parcial de Kakeya (pues aún falta verificar la simple conectividad) $K^{(N)}$ que contiene a Δ y que además $|K^{(N)} \setminus \Delta| < \epsilon$. Para determinar el valor de N para cumplir la desigualdad, asumimos que el área de toda la N - ésima generación de raíces es menor que $\frac{\epsilon}{2}$ (dejando así $\frac{\epsilon}{2}$ para el

área de los árboles excluyendo a Δ). Pero esta área total es $r^N |J|$, así que tenemos $r^N |J| < \frac{\epsilon}{2}$. Por lo tanto $N > \log_r \frac{\epsilon}{2|J|}$.

Además, sin importar cuántos árboles haya en la N – ésima generación, de (2.8) vemos que su aporte en área es menor que $4 \frac{|J|^{(N)}}{p}$, donde $|J|^{(N)}$ es el área total de la generación de raíces que reemplazan y p es su orden. Como para toda N , $|J|^{(N)} \leq |J|$, elegimos $p > \frac{8|J|}{\epsilon}$ y obtenemos así el resultado deseado. ■

Definición 2.13 $K^{(N)}$

Dado un conjunto de Keakeya parcial $K^{(0)}$ como en la fig. 2.25, $K^{(N)}$ es el conjunto que se obtiene al repetir N veces el proceso de reemplazo descrito en la demostración del teorema 2.9 – b a $K^{(0)}$. $K^{(N)}$ es el N – ésimo reemplazo de $K^{(0)}$

Que $K^{(N)}$ sea simplemente conexo no es evidente, pues la segunda generación de raíces está en el mismo lado que el árbol T y pueden ocurrir traslapes que generen agujeros. Sin embargo, al menos en $K^{(1)}$ y $K^{(2)}$ esta situación no ocurre.

Lema 2.14 Los árboles T_p son simplemente conexos

Demostración

Se demuestra por inducción sobre el orden p del árbol. El lema es evidente para $p = 1$. Asumimos que T_{p-1} es simplemente conexo. Para

cada triángulo elemental t_i de T_p sea $A_i := T_{p-1} \cup t_i$. Entonces aplicamos el lema 1.21 a la unión $\bigcup_i A_i = T_p$ pues

- (i) T_{p-1} y t_i son simplemente conexos y su intersección es no vacía, por lo tanto A_i es simplemente conexo.
- (ii) $A_i \cap A_j = T_{p-1}$ para $i \neq j$.
- (iii) $T_{p-1} \subset A_i$ para todo i .

Por lo tanto T_p es simplemente conexo. ■

Lema 2.15 $K^{(1)}$ es simplemente conexo.

Demostración

La pendiente del lado inferior de cualquier raíz J_i es menor que la pendiente del lado superior de su raíz vecina inferior J_{i+1} , puesto que estas líneas se encuentran en V_i , la cual está a la derecha de $x = 0$ (fig.2.27). Debido a que las raíces no se interceptan entre sí, el lema 2.14 nos dice que $K^{(1)}$ es simplemente conexo. ■

Lema 2.16 $K^{(2)}$ es simplemente conexo

Demostración

Notemos en primer lugar (ver figura 2.30) que la segunda generación de árboles T_1, \dots, T_m no se interceptan entre sí. Esto se debe a que las raíces J_1, \dots, J_m a quienes reemplazan son disjuntas. Los vértices C_1, \dots, C_m de estos triángulos son distintos y tomando al orden de los árboles lo suficientemente grande podemos hacer que sus "cinturas" sean

segmentos disjuntos de $A'B'$. Entonces los árboles T_1, \dots, T_m se interceptarán entre sí únicamente dentro de T .

Examinemos ahora la relación entre cualquier raíz perteneciente a cualquier reemplazo de la segunda generación y el árbol original T . En la fig. 2.31 se muestra sólo una parte de T : la unión de dos triángulos elementales t_i y t_{i-1} los cuales están unidos por J_i . La base $A_i'B_i'$ del triángulo Δ_i desde el cual brota T_i está contenida en $t_i \cup t_{i-1}$ y por consiguiente también C_{ij} pertenece en esta unión, dado que está entre A_i' y B_i' . Comparando la pendiente de las líneas en dicha figura, tenemos que J_{ij} está contenido en el trapecoide $A_i'B_i'V_iV_{i-1}$, donde V_i y V_{i-1} son vértices adyacentes sobre $x = \delta + r \approx 1$ del árbol T . Así J_{ij} , una vez que deja a T no lo vuelve a interceptar. De esa manera no puede formar agujeros

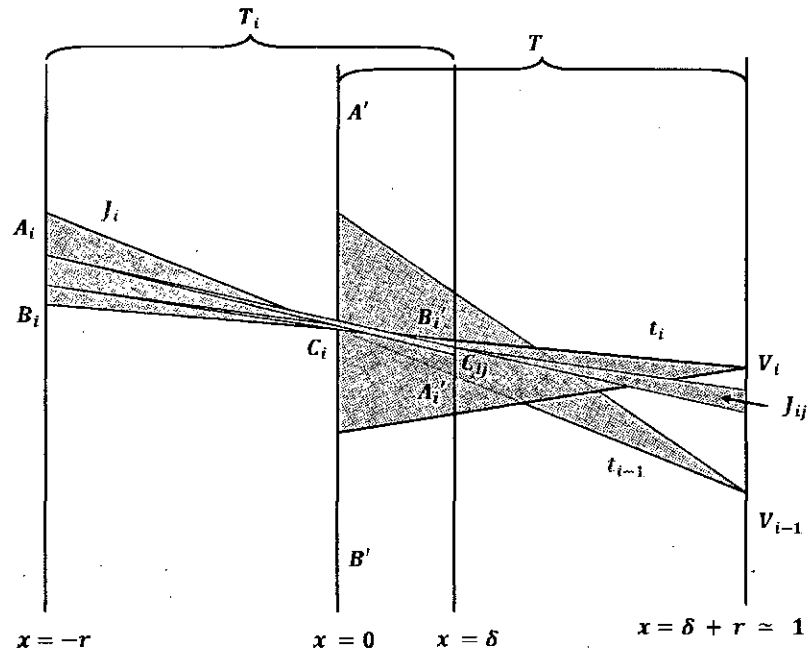


Fig. 2.31 Construcción de $K^{(2)}$

Además dos coyunturas J_{ij} y J_{ik} son disjuntas para una misma i . Para subíndice distinto, J_{ij} y $J_{ij'}$ están contenidas en trapezoides distintos por lo que pueden interceptarse entre sí únicamente en el interior de T . Es decir, no puede haber agujeros en $K^{(2)}$.

■

Cada árbol de la k – ésima generación ($k = 3, 5, \dots, N$) es nombrado por sus $k - 1$ índices, los primeros $k - 3$ de los cuales están también en la cadena de los índices del árbol de la etapa $k - 2$ desde la cual es descendiente por dos reemplazos (Ver fig.2.29. Recordar que la i – ésima generación corresponde al $i - 1$ –ésimo brote. Así, la primera generación consta de sólo un árbol T , antecesor de todos ellos).

Definición 2.17 Árbol descendiente

Sean T' y T'' dos árboles indexados como en la fig. 2.29. Diremos que T'' es descendiente de T' cuando el sistema de índices de T'' empiece con el sistema de índices de T' .

Definición 2.18 $S(T')$

Sea T' un árbol perteneciente a la N – ésima generación impar. Existe una única cadena de $\frac{N+1}{2}$ árboles, uno por cada generación impar desde 1 hasta N , es decir, empezando con T y terminando con T' , tal que cada árbol en la cadena es descendiente de todos sus predecesores. La unión de todos los árboles de la cadena es representada mediante $S(T')$.

El conjunto $S(T')$ se obtiene al empezar desde T' hacia atrás, eliminando índices dos a dos de derecha a izquierda. Por ejemplo, en la figura 2.29 si tomamos $T' = t_{0110} \in 5^{\text{ta}}$ generación, $S(T')$ es entonces

$$S(T') = S(t_{0110}) = \{t, t_{01}, t_{0110}\}$$

Cuando la aguja se mueve desde la línea $A'A$ hacia la línea $B'B$ en $K^{(1)}$, su pendiente atraviesa una sucesión de intervalos $\bar{\Delta}(t_0), \bar{\Delta}(J_1), \bar{\Delta}(t_1), \dots, \bar{\Delta}(J_m), \bar{\Delta}(t_m)$. Por construcción de $K^{(1)}$, estos intervalos en el orden dado constituyen una partición de $\bar{\Delta}(\Delta)$.

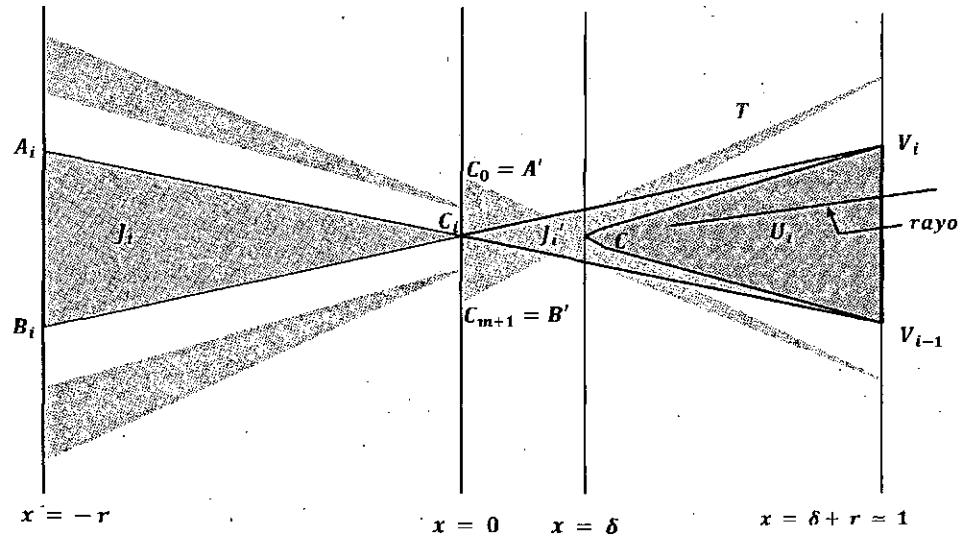


Fig. 2.32 J_i, J'_i y U_i

A cada J_i hay asociado otro triángulo $J'_i = \Delta V_{i-1} C_i V_i$ el cual tiene el mismo intervalo de pendientes (figura 2.32). La parte de J'_i que no está en T es una región convexa U_i acotada por la derecha por el segmento $V_{i-1} V_i$ y por la izquierda por un arco poligonal desde V_{i-1} hasta V_i el cual es parte de la frontera de T y está compuesto por segmentos de los lados de triángulos elementales. Puesto que las pendientes de los segmentos de

este arco frontera nunca están en $\bar{\Delta}(J_i) = \bar{\Delta}(J_i')$ cualquier rayo originado en U_i y extendido hacia la derecha con una pendiente en $\bar{\Delta}(J_i')$ no se intercepta con T .

Sea

$$T^* := T \cup \bigcup_{i=1}^m U_i$$

y similarmente para otros árboles. Tenemos entonces el siguiente lema.

Lema 2.19:

$$\bigcap_{i,j} T_{ij}^* \subset T \cup U_i$$

Demostración:

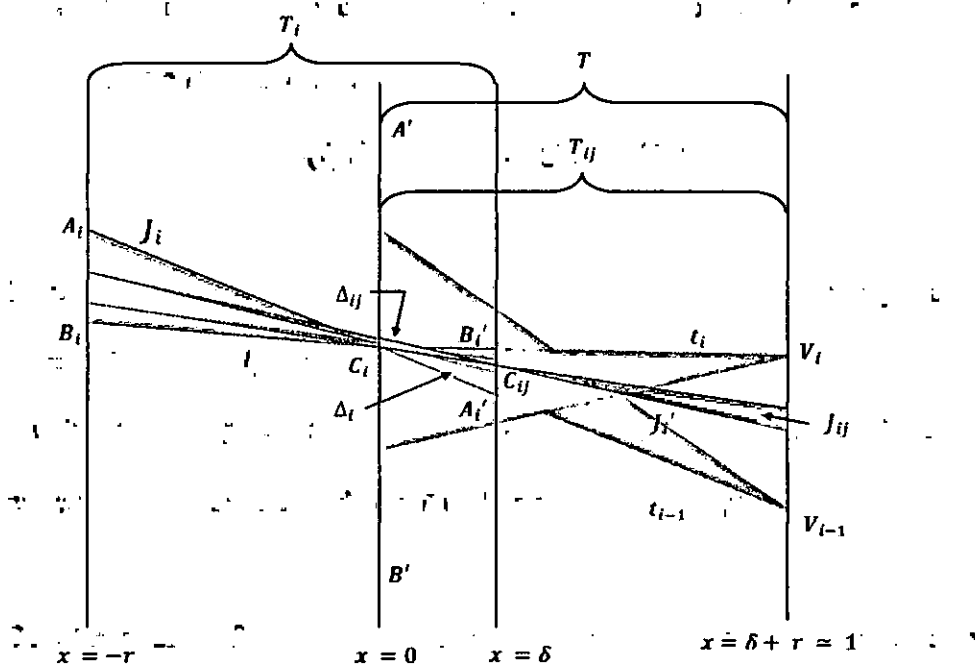


Fig. 2. 33 Demostración del Lema 2.19

Veamos la fig.2.33. El triángulo $\Delta_i = \Delta A_i' C_i B_i'$ desde el cual T_i brota (recordemos que T_i está asociado a J_i) tiene su vértice C_i estrictamente

entre A' y B' y su base $A_i'B_i'$ en la cintura de T . Este triángulo está contenido en T , y si nosotros tomamos el orden de T_i lo suficientemente grande, entonces la parte de T_i en la banda $0 \leq x \leq \delta$ está también contenida en T .

Repitiendo lo anterior en la segunda etapa concluimos que la parte de T_{ij} (el cual está asociado a J_{ij}) en la misma banda está contenida en T_i y entonces en T . Ahora cualquier punto en T_{ij}^* con $x > \delta$ es interceptado desde la cintura de T_{ij} mediante un rayo hacia la derecha con pendiente $\bar{\Delta}(\Delta_{ij})$, donde Δ_{ij} es el triángulo desde el cual T_{ij} crece.

La cintura de T_{ij} está contenida en el segmento $A_i'B_i'$ el cual está contenido en $J_i' = \Delta V_i C_i V_{i-1}$. También

$$\bar{\Delta}(\Delta_{ij}) = \bar{\Delta}(J_{ij}) \subset \bar{\Delta}(J_i) = \bar{\Delta}(J_i').$$

Empezando en J_i' y moviendo hacia la derecha sobre un rayo con pendiente en $\bar{\Delta}(J_i')$, permanecemos en J_i' bajo $x = \delta + r \simeq 1$. Esto prueba que la parte de T_{ij}^* en $x > \delta$ está contenida en J_i' , la cual nuevamente está contenida en $T \cup U_i$, completando la prueba. ■

Corolario 2.20: Si T' es un árbol (de cualquier generación impar) cuyo primer índice es i , entonces $T' \subset T \cup U_i$.

Demostración

Del lema 2.19, $T' \subset T'' \subset T \cup U_i$

Corolario 2.21: Si T' y T'' son árboles cuyos primeros índices son diferentes, entonces $T' \cap T'' = T$

Demostración

Si $i \neq j$ entonces U_i y U_j son disjuntos. Entonces

$$T' \subset T'^* \subset T \cup U_i$$

$$T'' \subset T''^* \subset T \cup U_j$$

Entonces

$$T' \cap T'' \subset T \cup (U_i \cap U_j) = T$$

■

Lema 2.22: $S(T') \cap S(T'')$ es conexo por arcos para cada par de árboles T', T'' pertenecientes a la N – ésima etapa

Demostración

Sea T''' el antecesor común más reciente de T' y T'' . Esto significa que los índices de T''' son los índices comunes de T' y T'' desde el principio, hasta los dos últimos que es donde difieren. Aparentemente el corolario 2.21 no puede ser aplicado pues T' y T'' no son diferentes en sus primeros índices. Sin embargo, si aplicamos este corolario a T''' , y no a T , vemos T' y T'' si satisfacen las hipótesis de dicho corolario (serán de primer índice distinto desechando los índices comunes a T'''). Así pues $T' \cap T'' \subset T'''$. Por lo que $S(T') \cap S(T'') = T'''$. Este árbol es efectivamente conexo por arcos (De hecho es simplemente conexo de acuerdo al lema 2.14)

■

Lema 2.23. $T \cap T'$ es conexo por arcos para cada T'

Demostración

Denotemos al primer índice de T' con i , de manera que $T' \subset T \cup U_i$. Sabemos que $T \cap T'$ contiene al segmento σ' , que está sobre el eje Y , el cual es la frontera izquierda de T' . Mostraremos que cada punto P en $T \cap T'$ está unido a σ' mediante un segmento en $T \cap T'$, mostrando así que $T \cap T'$ es arco conexo, y además conexo. Es decir, P está en algún triángulo elemental T' , y además está unido a algún punto Q de σ' mediante un segmento cuya pendiente λ pertenece al intervalo de pendientes de este triángulo y por consiguiente a $\bar{\Delta}(J_i)$. Si el segmento \overline{PQ} no está contenido también en T , podríamos tener un punto en U_i , y entonces P podría estar sobre el rayo que se extiende hacia la derecha y que parte de aquel punto con pendiente λ . Esto es imposible porque $P \in T$.

■

Corolario 2.24: Si T'' es descendiente de T' , entonces $T'' \cap T'$ es conexo por arcos

Demostración

El corolario resulta inmediatamente de aplicar el lema 2.23 a T' .

■

Lema 2.25: $S(T')$ es simplemente conexo para cada árbol T' de la N -ésima etapa

Demostración

Sea $T = T^1, T^2, \dots, T^M = T'$, donde $M = \frac{N+1}{2}$, la cadena para T' es decir,

$$S(T') = \bigcup_{k=1}^M T^k$$

Aplicamos el lema 1.21 a esta unión.

Cada T^k es simplemente conexo por el lema 2.14; sus intersecciones de a dos son arco conexas según el corolario 2.24; y su intersección como familia es no vacía pues sus bases sobre el eje Y forman una sucesión anidada de segmentos.

■

Demostración del teorema 2.9 – (b)

El conjunto de Kakeya K es la unión de Q conjuntos K_q de tipo $K^{(N)}$ donde $K^{(N)}$ es el N – ésimo reemplazo de $K^{(0)}$. Para demostrar que K es simplemente conexo usaremos el lema 1.21. Verificaremos si K_q satisfacen las hipótesis del referido lema:

(iii) Dado que cada K_q contiene el centro de Π , $K_i \cap K_j \cap K_k$ es no vacío para $i \neq j \neq k$. Por consiguiente (iii) es satisfecho.

(ii) Es evidente, excepto cuando los índices de los K_q que se interceptan son consecutivos. Para este caso, que $K_q \cap K_{q+1}$ sea conexo por arcos para cada q se deduce de la situación descrita en la figura 2.27.

Nos queda verificar la hipótesis (i), esto es que cada K_q es por sí mismo simplemente conexo, es decir, que $K_q = K^{(N)}$ es simplemente conexo. Usamos el sistema de coordenadas de la figura 2.26 y descomponemos a $K^{(N)}$ como $K^{(N)} = L \cup R$, donde L es la parte de $K^{(N)}$ en $x \leq 0$ y R es la parte en $x \geq 0$. Si se prueba que L y R son simplemente conexos, entonces aplicando el lema 1.20 a L y R se muestra que $K^{(N)}$ es simplemente conexo.

No obstante, L se descompone naturalmente como la unión de m conjuntos (donde m es el número de raíces de la primera etapa), cada uno compuesto del segmento $A'B'$ sobre $x = 0$ y la parte de L descendiente de las raíces de la primera etapa y de todos los subsecuentes reemplazos. Cada uno de estos conjuntos es estructuralmente parecido a R pues cada dos pasos ocurre una reflexión con respecto a los ejes y una traslación. Si probamos que R es simplemente conexo, entonces la prueba se aplicará para probar que L es simplemente conexo también. Por lo tanto, sólo hay que probar que la parte de $K^{(N)}$ en $x \geq 0$ es simplemente conexa. Los casos de N par e impar no son idénticos; no obstante el resultado aplica tanto a L como a R , ya que las técnicas de prueba son las mismas para los dos casos.

Por consiguiente, vamos a considerar a $K^{(N)}$ como la unión de los árboles de todas las N etapas impares de reemplazo desde 1 hasta N . Para probar que $K^{(N)}$ es simplemente conexo, aplicamos el lema 1.21 a

$$R = \bigcup_{T' \in A_N} S(T')$$

, donde A_N es el conjunto de todos los árboles de la N - ésima generación.

El lema 2.25 da la hipótesis (i), el lema 2.22 da la hipótesis (ii) y puesto que $T \subset S(T')$ para todo T' , la hipótesis (iii) es satisfecha. Por consiguiente R es simplemente conexo y entonces $K^{(N)}$ también lo es.

■

Demostración del teorema 2.9 – (c)

Sea D es un disco centrado en el origen de radio $r < 1$ y $P \in D$ tal que $\|P\| < 1 - r$. Entonces $D \setminus P$ no es un conjunto de Kakeya pues para que la aguja retorne a su posición inicial debe pasar por P (figura 2.22). Así, cualquier conjunto de Kakeya contenido en D no debe contener al pequeño disco de radio $1 - r$ concéntrico con D , y debe por lo tanto, tener área como mínimo $\pi(1 - r)^2$ lo cual es una contradicción. La propiedad de ser simplemente conexo no es ningún problema ya que se trata de un solo punto y el conjunto de Kakeya tiene área cero.

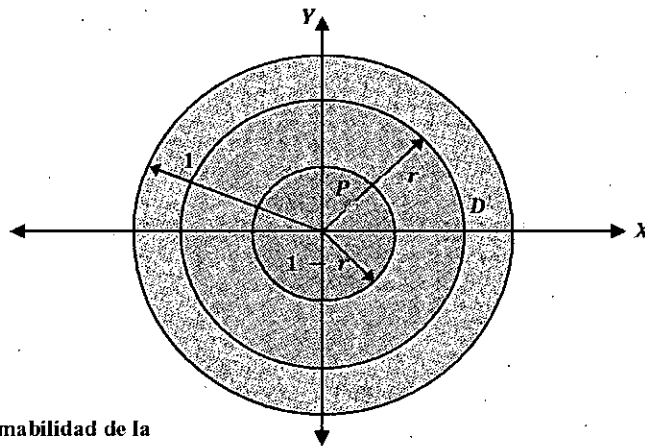


Fig. 2. 34 Optimabilidad de la construcción de Cunningham

■

CAPITULO 3

LA CONJETURA DE KAKEYA

3.1 Introducción

A primera vista, el problema de Kakeya parece ser sólo una curiosidad matemática. Sin embargo, en las últimas cuatro décadas, distintos trabajos en áreas aparentemente no relacionadas con este problema han mostrado que tiene relación con aquellas.

Las áreas donde la conjetura de Kakeya tiene consecuencias son:

- Sumación Multidimensional de Fourier (Fefferman 1972, Córdoba 1982, Bourgain 1995,...)
- La ecuación de onda (Wolff 1999)
- Comportamiento de las series de Dirichlet en la teoría analítica de números (Bourgain 2001)
- Generación de números aleatorios (Dvir – Wigderson 2008)

Además, la conjetura es notable por las diversas áreas de la matemática a las que se recurre para obtener resultados parciales. Entre estas áreas podemos mencionar:

- Geometría de Incidencia
- Aritmética Combinatoria
- Análisis Multiescala
- Análisis Armónico
- Topología Algebraica
- Geometría Algebraica

En 1999, Wolff introdujo la Conjetura de Kakeya para Campos Finitos, la cual ha sido probada completamente y que tiene aplicaciones en la informática teórica. Inclusive su técnica de demostración, el método polinomial, ha sido utilizada para probar dos conjeturas (ahora convertidas en teoremas) en el espacio euclidiano.

En este capítulo demostraremos la conjetura euclidiana para el caso del plano y presentaremos la prueba de la conjetura restringida al caso de los campos finitos.

3.2 La Conjetura de Kakeya.

Hagamos una breve distinción entre los dos tipos de conjuntos que estamos estudiando.

Definición 3.1 Conjunto de Besicovitch

Un conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ se dice de Besicovitch si tiene área cero y contiene una aguja en cada dirección, es decir, si y solo si

$$\bigwedge_{\xi \in S^{n-1}} \bigvee_{x \in \mathbb{R}^n} \bigwedge_{t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]} x + t\xi \in K$$

Definición 3.2 Conjunto de Kakeya

Un conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ se dice de Kakeya si es un conjunto de Besicovitch y sobre él una aguja puede rotarse 180° .

Como vimos en el teorema 2.9, el problema de acotación de los conjuntos contruidos por Besicovitch para dar respuesta el problema de Kakeya fue resuelto por Cunningham sin recurrir a las conexiones de Pàl. Debido a eso, las denominaciones “conjunto de Besicovitch” y “conjunto de Kakeya” se utilizan casi indistintamente en la literatura, es decir, ambas se refieren al conjunto descrito en la definición 3.1.

Hasta ahora hemos visto que tal conjunto tienen medida n – dimensional de Lebesgue igual a cero (teorema 2.5). No obstante, muchos problemas en análisis requieren información sobre el tamaño de tales conjuntos en términos de su dimensión. En esta dirección, existen varias formulaciones de esta conjetura. Daremos las que utilizan las dimensiones de Hausdorff y de Minkowsky.

Conjetura 3.3 La Conjetura de Kakeya (versión Hausdorff)

Un conjunto de Besicovitch en \mathbb{R}^n tiene dimensión de Hausdorff igual a n .

Conjetura 3.4 La Conjetura de Kakeya (versión Minkowsky)

Un conjunto de Besicovitch en \mathbb{R}^n tiene dimensión de Minkowsky igual a n .

Como bien sabemos,

$$\dim_{\mathcal{H}}(E) \leq \underline{\dim}_{\mathcal{M}}(E) \leq \overline{\dim}_{\mathcal{M}}(E)$$

, donde E es un conjunto compacto de \mathbb{R}^n .

Dado que para el conjunto de Besicovitch $K \subset \mathbb{R}^n$, la estimación superior para ambas dimensiones es n , por consiguiente el problema al que podríamos llamar “Versión moderna del problema de Kakeya” puede ser expresado como:

Problema 3.5 Versión Moderna del Problema de Kakeya

Cualquier conjunto de Besicovitch $K \subset \mathbb{R}^n$ tiene dimensión de Minkowsky (resp. Hausdorff) $\geq \beta_{\mathcal{M}}(n)$ (resp. $\beta_{\mathcal{H}}(n)$).

La conjetura dice entonces que $\beta_{\mathcal{H}}(n) = \beta_{\mathcal{M}}(n) = n$.

Hay una versión discretizada de la conjetura que utiliza una escala $0 < \delta \ll 1$. Sea Ω un subconjunto δ – separado maximal de S^{n-1} , de manera que $\# \Omega \approx \delta^{1-n}$. Para cada $\omega \in \Omega$, sea T_{ω} un tubo $\delta \times 1$ en la dirección de ω . Sea $0 \leq \lambda \leq 1$, definimos $\hat{T}_{\omega} \subset T_{\omega}$ tal que $|\hat{T}_{\omega}| = \lambda |T_{\omega}|$.

Tenemos entonces la siguiente versión

Conjetura 3.6 Conjetura de Kakeya (versión Maximal)

$$\bigwedge_{\substack{\epsilon > 0 \\ 0 < \delta \ll 1}} \lambda^{\beta(n)} \delta^n - \beta(n) \leq C_\epsilon \delta^{-\epsilon} \left| \bigcup_{\omega \in \Omega} \hat{T}_\omega \right|$$

Las relaciones entre las conjeturas 3.3, 3.4 y 3.6 vienen dadas por las siguientes implicaciones:

$$\text{conjetura 3.6} \Rightarrow \text{conjetura 3.3} \Rightarrow \text{conjetura 3.4}$$

Para $\beta(n) = \beta_{\mathcal{H}}(n) = \beta_{\mathcal{M}}(n) = 2$ todas las conjeturas están probadas. Sin embargo para $n \geq 3$ permanecen aún sin demostrar aunque sí hay varios resultados parciales.

El cuadro 3.1 que aparece en [KT02] resume los progresos realizados. Las técnicas que se han utilizado para llegar a estos resultados parciales se pueden agrupar en tres grupos: El método geométrico, el método aritmético combinatorio y el híbrido que utiliza ambos.

En esta investigación sólo nos centraremos en los resultados definitivos que se han obtenido en las conjeturas 3.3 y 3.4 los cuales se demuestran en la siguiente sección. Para dimensión 2 ambas conjeturas están muy vinculadas y la conjetura 3.6 parece independiente. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, para dimensiones más altas la conjetura 3.3 puede obtenerse de la 3.6 razón por la que no desarrollamos sus resultados parciales.

Resultado	Dimensión	$\beta(n)$	
Minkowsky / Hausdorff	$n = 2$	2	Davies, 1971
Maximal	$n = 2$	2	Córdoba, 1977
Minkowsky / Hausdorff	$n \geq 3$	$\frac{n-1}{2} + 1$	Drury, 1983
Maximal	$n \geq 3$	$\frac{n-1}{2} + 1$	Christ – Duoandikoetxea – Rubio de Francia, 1987
Todas	$n \geq 3$	$\frac{n-1}{2} + 1 + \epsilon_n$	Bourgain, 1991
Todas	$n \geq 3$	$\frac{n-1}{2} + 2$	Wolff, 1995
Minkowsky / Hausdorff	$n > 26$	$13\frac{n-1}{25} + 1$	Bourgain, 1998
Maximal	$n \gg 1$	$\frac{n(1+\epsilon)}{2}$	Bourgain, 1998
Hausdorff	$n > 12$	$6\frac{n-1}{11} + 1$	Katz – Tao, 1999
Minkowsky	$n > 8$	$4\frac{n-1}{7} + 1$	Katz – Tao, 1999
Minkowsky	$n = 3$	$\frac{5}{2} + \epsilon$	Katz – Laba – Tao, 1999
Minkowsky	$n = 4$	$3 + \epsilon$	Laba – Tao, 2000
Minkowsky	$23 \geq n \geq 5$	$(2 - \sqrt{2})(n-4) + 3$	Katz – Tao, 2000
Minkowsky	$n > 23$	$\frac{n-1}{\alpha} + 1$	Katz – Tao, 2000
Hausdorff	$n \geq 5$	$(2 - \sqrt{2})(n-4) + 3$	Katz – Tao, 2000
Maximal	$n \geq 9$	$\frac{4(n-1)}{7} + 1$	Katz – Tao, 2000

Cuadro 3.1 Progresos en la demostración de la conjetura de Kakeya.
 $\alpha = 1.675$ es la mayor raíz de $\alpha^3 - 4\alpha + 2 = 0$. Los colores indican las décadas.

Aunque los resultados no son definitivos, veremos cómo las ideas de la aritmética combinatoria se emplean para obtener cotas inferiores en la dimensión de Minkowsky de los conjuntos de Besicovitch. Este tipo de

argumento fue introducido por Bourgain y fue notablemente simplificado por Katz y Tao. Empezamos con la siguiente definición.

Definición 3.7 Elemento Popular

Sean X y A conjuntos finitos y $f: X \rightarrow A$ una función. Se dice que un $a \in A$ es un **elemento popular** si y sólo si

$$\# \{x \in X | f(x) = a\} \geq \frac{\# X}{2 \# A},$$

Lema 3.8 Sean X, A_1, \dots, A_n conjuntos finitos para algún entero $n \geq 1$, y para cada $1 \leq i \leq n$ sea $f_i: X \rightarrow A_i$ una función. Entonces

$$\# \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in X^{n+1} \mid \bigwedge_{1 \leq i \leq n} f_i(x_{i-1}) = f_i(x_i) \right\} \geq \frac{(\# X)^{n+1}}{\prod_{i=1}^n \# A_i} \quad (3.1)$$

Demostración

La prueba es por inducción sobre n . La afirmación para $n = 1$ es consecuencia de la desigualdad de Cauchy – Schwarz para grafos bipartitos¹. Como X y A_1 son finitos, consideramos a la función f_1 como el grafo $G = G(X, A_1, E)$. Puesto que $f_1(x_j) = f_1(x_j)$, $j = 0, 1$, $\# X \leq \# E$. Además, la ecuación $f_1(x_0) = f_1(x_1)$ representa a un camino de longitud 2 cuyos extremos son x_0 . Por consiguiente, la desigualdad de Cauchy – Schwarz para grafos bipartitos afirma que

$$\# \{(x_0, x_1) \in X^2 | f_1(x_0) = f_1(x_1)\} \geq \frac{(\# E)^2}{\# A_1} \geq \frac{(\# X)^2}{\# A_1}$$

¹ Un grafo G es *bipartito* si se puede particionar su conjunto de vértices en dos conjuntos disjuntos A y B de manera que cada arista tiene un extremo en A y el otro en B . A y B se denominan las *clases de color* de G .

Supongamos ahora que $n > 1$ y probaremos el lema para $n + 1$.

Sea $a \in A_n$ un elemento popular, es decir,

$$\# \{x \in X | f_n(x) = a\} \geq \frac{\# X}{2 \# A_n},$$

Se define entonces $X' \subset X$ como

$$X' := \{x \in X | f_n(x) \text{ es popular}\}$$

Negando la definición de elemento popular, el cardinal del conjunto

$$X \setminus X' = \{x \in X | f_n(x) \text{ no es popular en } A_n\}$$

satisface

$$\# (X \setminus X') \leq \frac{\# X}{2 \# A_n} \leq \frac{\# X}{2}$$

$$\# X - \# X' \leq \frac{\# X}{2}$$

$$\frac{\# X}{2} \leq \# X' \tag{3.2}$$

Aplicando la hipótesis inductiva a X' , tenemos que:

$$\# \left\{ (x_0, \dots, x_{n-1}) \in (X')^n \mid \bigwedge_{1 \leq i < n} f_i(x_{i-1}) = f_i(x_i) \right\} \geq \frac{(\# X')^n}{\prod_{i=1}^{n-1} \# A_i}$$

Dado que estamos asumiendo por la hipótesis inductiva que (3.1) es verdadera para $n \geq 1$ y como $x_{n-1} \in X'$, por definición de X' tenemos que $f_n(x_{n-1})$ es popular, por lo que

$$\# \left\{ (x_0, \dots, x_{n-1}, x_n) \in (X')^n \times X \mid \bigwedge_{1 \leq i \leq n} f_i(x_{i-1}) = f_i(x_i) \right\} \geq \frac{(\# X')^n}{\prod_{i=1}^{n-1} \# A_i} \frac{\# X}{2 \# A_n}$$

Dado que $X' \subset X$, $(X')^n \times X \subset X^n \times X = X^{n+1}$. Elevando (3.2) a la potencia n tenemos entonces

$$\begin{aligned} & \# \left\{ (x_0, \dots, x_{n-1}, x_n) \in X^{n+1} \mid \bigwedge_{1 \leq i \leq n} f_i(x_{i-1}) = f_i(x_i) \right\} \geq \\ & \# \left\{ (x_0, \dots, x_{n-1}, x_n) \in (X')^n \times X \mid \bigwedge_{1 \leq i \leq n} f_i(x_{i-1}) = f_i(x_i) \right\} \geq \\ & \geq \frac{(\# X')^n \# X}{\prod_{i=1}^{n-1} \# A_i 2 \# A_n} \geq \frac{(\# X)^{n+1}}{2^{n+1} \prod_{i=1}^n \# A_i} \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\# \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in X^{n+1} \mid \bigwedge_{1 \leq i \leq n} f_i(x_{i-1}) = f_i(x_i) \right\} \geq 2^{-n-1} \frac{(\# X)^{n+1}}{\prod_{i=1}^n \# A_i} \quad (3.3)$$

Para eliminar 2^{-n-1} empleamos el truco conocido como "la potencia del tensor": damos un entero M muy grande y aplicamos (3.3) con X y A_i cambiados por X^M y A_i^M ; f_i reemplazado por la función $f_i^M: X^M \rightarrow A_i^M$ definida por

$$f_i^M(x^1, \dots, x^M) = (f_i(x^1), \dots, f_i(x^M))$$

Así, obtenemos:

$$\left(\# \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in X^{n+1} \mid \bigwedge_{1 \leq i \leq n} f_i(x_{i-1}) = f_i(x_i) \right\} \right)^M \geq 2^{-n-1} \left(\frac{(\# X)^{n+1}}{\prod_{i=1}^n \# A_i} \right)^M$$

Extrayendo la raíz M -ésima,

$$\# \left\{ (x_0, \dots, x_n) \in X^{n+1} \mid \bigwedge_{1 \leq i \leq n} f_i(x_{i-1}) = f_i(x_i) \right\} \geq 2^{\frac{-n-1}{M}} \frac{(\# X)^{n+1}}{\prod_{i=1}^n \# A_i}$$

Haciendo que $M \rightarrow \infty$ tenemos finalmente (3.1)

■

Sea $N \in \mathbb{Z}^+$, $(Z, +)$ un grupo abeliano y A, B subconjuntos finitos de Z con cardinalidad

$$\# A, \# B \leq N \quad (3.4)$$

Sea $G \subset A \times B$. Consideremos el problema de acotar la cantidad

$$\# \{a - b \mid (a, b) \in G\} \quad (3.5)$$

Sin ninguna otro supuesto sobre G podemos únicamente obtener la cota trivial de N^2 (N elecciones para a y lo mismo para b).

Sin embargo, en [Bo99] Bourgain demostró que con el supuesto adicional

$$\# C \leq N \quad (3.6)$$

donde

$$C = \{a + b \mid (a, b) \in G\}$$

se puede mejorar la cota de (3.5) a $N^{2-\frac{1}{13}}$.

El siguiente teorema debido a Katz y Tao da mejoras adicionales a los resultados de Bourgain.

Teorema 3.9 *Sea A, B, C, N como antes. Entonces tenemos*

$$\# \{a - b \mid (a, b) \in G\} \leq N^{2-\frac{1}{6}} \quad (3.7)$$

Demostración

Fijemos A, B, C, N . Dado que $G \subset A \times B$ podemos asumir, eliminando elementos redundantes de G , que el mapeo

$$\varphi: G \rightarrow Z$$

definido por $\varphi(a, b) = a - b$, es inyectivo en G .

Definimos el conjunto

$$V = \{(a, b, b') \in A \times B \times B \mid (a, b), (a, b') \in G\} \quad (3.8)$$

Consideremos ahora a $\pi_1: G \rightarrow A$, la primera proyección, y definamos a este otro conjunto

$$H = \{(g_0, g_1) \in G \times G \mid \pi_1(g_0) = \pi_1(g_1)\}$$

Veamos cómo se relacionan los cardinales de V y H .

Escribimos $g_0 = (a, b)$ y $g_1 = (a, b')$. La condición $\pi_1(g_0) = \pi_1(g_1)$ en la definición de H nos dice las primeras componentes de g_0 y g_1 coinciden, es decir H puede ser escrito como

$$H = \{((a, b), (a, b')) \in G \times G \mid (a, b), (a, b') \in G\}$$

Como la primera componente de los pares que están en H es la misma y $G \subset A \times B$ tenemos que

$$\# H \leq \# V$$

Aplicando (3.1) con $n = 1$, $X = G$, $A_1 = A$ y $f_1 = \pi_1$ y adicionando (3.4) concluimos que

$$\# V \geq \frac{(\# G)^2}{N} \quad (3.9)$$

Consideremos ahora los mapeos $f_1: V \rightarrow C \times C$, $f_2: V \rightarrow B \times B$ y $f_3: V \rightarrow C \times B$ definidos por

$$f_1(a, b, b') = (a + b, a + b')$$

$$f_2(a, b, b') = (b, b')$$

$$f_3(a, b, b') = (a + b, b')$$

Denotemos por S al conjunto

$$S = \{(v_0, v_1, v_2, v_3) \in V^4 | f_1(v_0) = f_1(v_1), f_2(v_1) = f_2(v_2), f_3(v_2) = f_3(v_3)\}$$

Aplicamos (3.1) con $X = V$, $A_1 = C \times C$, $A_2 = B \times B$ y $A_3 = C \times B$, de donde

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq 3} \# A_i \leq N^2,$$

obtenemos que

$$\# S \geq \frac{(\# V)^4}{N^6}$$

, es decir,

$$\frac{\# S}{\# V} \geq \frac{(\# V)^3}{N^6} \quad (3.10)$$

Para abreviar, escribimos $\bigwedge_{0 \leq i \leq 3} v_i = (a_i, b_i, b'_i)$. Consideramos ahora el mapeo

$$\phi: S \rightarrow V \times A \times B$$

, definido por

$$\phi(v_0, v_1, v_2, v_3) = (v_0, a_2, b_3)$$

Vamos a demostrar que ϕ es inyectiva, es decir que (v_0, a_2, b_3) determina a (v_0, v_1, v_2, v_3) . Por consiguiente se debe probar que:

$$\phi(v_0, v_1, v_2, v_3) = \phi(v_0^*, v_1^*, v_2^*, v_3^*) \Rightarrow (v_0, v_1, v_2, v_3) = (v_0^*, v_1^*, v_2^*, v_3^*)$$

, es decir,

$$(v_0, a_2, b_3) = (v_0^*, a_2^*, b_3^*) \Rightarrow (v_0, v_1, v_2, v_3) = (v_0^*, v_1^*, v_2^*, v_3^*)$$

Por lo tanto hay que verificar las siguientes igualdades

$$v_0 = v_0^*$$

$$v_1 = v_1^* \Leftrightarrow (a_1, b_1, b'_1) = (a_1^*, b_1^*, b_1^*)$$

$$v_2 = v_2^* \Leftrightarrow (a_2, b_2, b'_2) = (a_2^*, b_2^*, b_2^*)$$

$$v_3 = v_3^* \Leftrightarrow (a_3, b_3, b'_3) = (a_3^*, b_3^*, b_3^*)$$

De la definición de ϕ tenemos $v_0 = v_0^*$, $a_2 = a_2^*$ y $b_3 = b_3^*$, por lo que la primera de estas igualdades está satisfecha. Empezaremos por demostrar la cuarta de ellas.

Por definición de ϕ nuevamente tenemos $b_3 = b_3^*$. Es decir, debemos demostrar que

$$\begin{aligned} a_3 &= a_3^* \\ b'_3 &= b_3^* \end{aligned}$$

Pero esto implica que $a_3 - b'_3 = a_3^* - b_3^*$.

Veamos. De la construcción de S tenemos

$$f_1(v_0) = f_1(v_1) \Leftrightarrow (a_0 + b_0, a_0 + b'_0) = (a_1 + b_1, a_1 + b'_1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + b_0 = a_1 + b_1 \\ \quad \wedge \\ a_0 + b'_0 = a_1 + b'_1 \end{cases} \quad (3.11)$$

$$f_2(v_1) = f_2(v_2) \Leftrightarrow (b_1, b'_1) = (b_2, b'_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = b_2 \\ \quad \wedge \\ b'_1 = b'_2 \end{cases} \quad (3.12)$$

$$f_3(v_2) = f_3(v_3) \Leftrightarrow (a_2 + b_2, b'_2) = (a_3 + b_3, b'_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_2 + b_2 = a_3 + b_3 \\ \quad \wedge \\ b'_2 = b'_3 \end{cases} \quad (3.13)$$

Restando las ecuaciones en (3.11) tenemos

$$b_0 - b'_0 = b_1 - b'_1 = b_2 - b'_2 \quad (3.14)$$

(la última igualdad proviene de restar las ecuaciones en (3.12)).

Además utilizando las ecuaciones de (3.13) y ordenándolas tenemos que

$$a_3 - b'_3 = a_3 + b_3 - b_3 - b'_2 = a_2 + b_2 - b'_2 - b_3$$

Combinando esta ecuación con la anterior, tenemos que

$$a_3 - b'_3 = a_2 + b_0 - b'_0 - b_3$$

Así que $a_3 - b'_3$ queda determinado por (v_0, a_2, b_3) el cual es igual a (v_0^*, a_2^*, b_3^*) - sólo hay que agregarle el $*$ a las anteriores líneas, por lo que $a_3 - b'_3 = a_3^* - b'_3^*$. Pero como $(a_3, b'_3) \in G$, debido a la inyectividad de φ , la igualdad anterior implica que

$$\begin{aligned} a_3 &= a_3^* \\ b'_3 &= b'_3^* \end{aligned}$$

Por lo tanto $v_3 = v_3^*$.

Demostramos ahora que $v_2 = v_2^*$. Pero esto equivale a probar que $b_2 - b'_2 = b_2^* - b'_2^*$. De (3.14) vemos que $b_2 - b'_2 = b_0 - b'_0$ y como $v_0 = v_0^*$ tenemos que $b_2 - b'_2 = b_2^* - b'_2^*$. Nuevamente por la inyectividad de φ , concluimos que $v_2 = v_2^*$.

Finalmente, para demostrar que $v_1 = v_1^*$ tenemos que demostrar que

$$a_1 = a_1^*$$

$$b_1 = b_1^*$$

$$b'_1 = b'^*_1$$

Tomando las dos últimas igualdades, tenemos que $b_1 - b'_1 = b_1^* - b'^*_1$.

Pero $b_1 - b'_1 = b_0 - b'_0$ y por la inyectividad de ϕ , $b_1 = b_1^*$ y $b'_1 = b'^*_1$.

Ahora, dado que tanto a (a_1, b_1, b'_1) y (a_1^*, b_1^*, b'^*_1) forman parte del cuarteto que pertenece a S , verifican entonces su la regla de construcción de dicho conjunto, es decir:

$$a_0 + b_0 = a_1 + b_1$$

$$a_0^* + b_0^* = a_1^* + b_1^*$$

Pero $a_0 = a_0^*$, $b_0 = b_0^*$ y $b_1 = b_1^*$ por lo que $a_1 = a_1^*$. Ergo $v_1 = v_1^*$

Así pues ϕ es inyectiva, por lo que

$$\# S = \# \phi(S) \leq \# A \# B \# V \leq N^2 \# V$$

, es decir,

$$\frac{\# S}{\# V} \leq N^2$$

Combinando esto con (3.10) tenemos

$$\frac{(\# V)^3}{N^6} \leq \frac{\# S}{\# V} \leq N^2$$

De donde

$$\# V \leq N^{\frac{8}{3}}$$

De (3.9) deducimos que

$$\frac{(\# G)^2}{N} \leq \# V \leq N^{\frac{8}{3}}$$

$$\# G \leq N^{\frac{11}{6}} = N^{2 - \frac{1}{6}}$$

Dado que por cada par $(a, b) \in G$ hay un número de la forma $a - b$, tenemos que

$$\# \{a - b | (a, b) \in G\} \leq \# G \leq N^{2 - \frac{1}{6}}$$

Que es lo que queríamos demostrar.



Veamos un ejemplo antes de continuar.

Ejemplo 3.1

Sea n un entero muy grande y consideramos:

$$Z = \mathbb{Z}^n, A = B = \{0, 1, 3\}^n,$$

$$G = \{(0, 1), (0, 3), (1, 0), (1, 3), (3, 0), (3, 1)\}^n;$$

Por consiguiente

$$C = \{a + b | (a, b) \in G\}^n = \{1, 3, 4\}^n$$

Tenemos entonces que $\# A = \# B = \# C = 3^n \leq N$ y $\# G = 6^n$.

En particular, tomaremos $N = 3^n$. Entonces el teorema 3.9 nos dice que

$$\# \{a - b | (a, b) \in G\} \leq 3^{\frac{11n}{6}}$$

Esto es cierto ya que $\# \{a - b | (a, b) \in G\} \leq \# G \leq 6^n$ y

$$\bigwedge_{n \geq 0} 6^n \leq 3^{\frac{11n}{6}}$$

Teorema 3.10 Sea A, B, C, N como antes. Si en el teorema 3.9 se considera la suposición adicional

$$\# D \leq N \quad (3.15)$$

, donde $D = \{a + 2b | (a, b) \in G\}$, entonces se puede mejorar el resultado del teorema 3.9 a:

$$\# \{a - b | (a, b) \in G\} \leq N^{2 - \frac{1}{4}} \quad (3.16)$$

Demostración

Fijemos A, B, C, D, N . Definimos V como en (3.8) y definimos la función

$$f_1: V \rightarrow D \times B$$

mediante $f_1(a, b, b') = (a + 2b, b')$. Igual que antes, suponemos que la función φ , definida anteriormente, es inyectiva en G .

Denotemos por T al siguiente conjunto

$$T = \{(v_0, v_1) \in V^2 | f_1(v_0) = f_1(v_1)\}$$

Aplicamos (3.1) con $X = V, n = 1, A_1 = D \times B$.

Como $\# D, \# B \leq N$ tenemos

$$\# T \geq \frac{(\# V)^2}{N^2} \quad (3.17)$$

Escribimos $\bigwedge_{i=0,1} v_i = (a_i, b_i, b'_i)$ y definimos el mapeo $\xi: T \rightarrow C \times C \times B$ mediante

$$\xi(v_0, v_1) = (a_0 + b_0, a_0 + b'_0, b_1)$$

Demostramos que ξ es inyectiva, es decir

$$\xi(v_0, v_1) = \xi(v_0^*, v_1^*) \Rightarrow (v_0, v_1) = (v_0^*, v_1^*)$$

$$(a_0 + b_0, a_0 + b'_0, b_1) = (a_0^* + b_0^*, a_0^* + b'^*_0, b_1^*) \Rightarrow (v_0, v_1) = (v_0^*, v_1^*)$$

Igual que antes, hay que demostrar

$$v_0 = v_0^* \Leftrightarrow (a_0, b_0, b'_0) = (a_0^*, b_0^*, b'^*_0)$$

$$v_1 = v_1^* \Leftrightarrow (a_1, b_1, b'_1) = (a_1^*, b_1^*, b'^*_1)$$

Empezamos con la última de estas ecuaciones. Por definición de ξ tenemos que $b_1 = b_1^*$, así que se debe demostrar que

$$a_1 = a_1^*$$

$$b'_1 = b'^*_1$$

, lo que implica $a_1 - b'_1 = a_1^* - b'^*_1$.

De la construcción de T tenemos:

$$f_1(v_0) = f_1(v_1) \Leftrightarrow (a_0 + 2b_0, b'_0) = (a_1 + 2b_1, b'_1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + 2b_0 = a_1 + 2b_1 \\ \quad \quad \quad \wedge \\ b'_0 = b'_1 \end{cases} \quad (3.18)$$

Por lo tanto al utilizar las ecuaciones de (3.18) tenemos

$$\begin{aligned} a_1 - b'_1 &= a_0 + a_1 + 2b_1 - 2b_1 - (a_0 + b'_1) \\ &= 2(a_0 + b_0) - 2b_1 - (a_0 + b'_0) \end{aligned}$$

Por consiguiente, dado que por hipótesis de inyectividad de ξ suponemos que $(a_0 + b_0, a_0 + b'_0, b_1) = (a_0^* + b_0^*, a_0^* + b'_0, b_1^*)$, concluimos que $a_1 - b'_1 = a_1^* - b'_1$. Nuevamente por la inyectividad de φ esta ecuación implica que

$$a_1 = a_1^*$$

$$b'_1 = b'_1$$

Ergo $v_1 = v_1^*$.

Para demostrar que $v_0 = v_0^*$, tenemos que demostrar que

$$a_0 = a_0^*$$

$$b_0 = b_0^*$$

$$b'_0 = b'_0$$

Pero

$$\begin{aligned} b_0 - b'_0 &= a_0 + b_0 - a_0 - b'_0 = a_0 + b_0 - (a_0 + b'_0) \\ &= a_0^* + b_0^* - (a_0^* + b'_0) = b_0^* - b'_0 \end{aligned}$$

Por la inyectividad de φ , los extremos de la cadena de ecuaciones anterior muestra que $b_0 = b_0^*$ y $b'_0 = b'_0$. Razonando análogamente como en la demostración del teorema anterior, obtenemos que $v_0 = v_0^*$.

Como ξ es inyectiva,

$$\# T \leq \# \xi(T) \leq \# C \# C \# B \leq N^3$$

Combinando con (3.17) tenemos que

$$\frac{(\# V)^2}{N^2} \leq \# T \leq N^3$$

De donde

$$\# V \leq N^{\frac{5}{2}}$$

De (3.9) se obtiene

$$\frac{(\# G)^2}{N} \leq \# V \leq N^{\frac{5}{2}}$$

Ergo

$$\# G \leq N^{\frac{7}{4}} = N^{2 - \frac{1}{4}}$$

Análogamente a la última parte de la demostración del teorema 3.9, tenemos finalmente (3.16)

$$\# \{a - b \mid (a, b) \in G\} \leq \# G \leq N^{2 - \frac{1}{4}}$$

■

Ejemplo 3.2

Para ilustrar este teorema usemos los conjuntos

$$Z = \mathbb{Z}^n, \quad A = \{0, 2, 3, 4\}^n, \quad B = \{0, 1, 2, 3\}^n$$

$$G = \{(4, 0), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (0, 2), (2, 2), (0, 3), (2, 3)\}^n$$

Entonces

$$C = \{a + b \mid (a, b) \in G\} = \{2, 3, 4, 5\}^n,$$

$$D = \{a + 2b | (a, b) \in G\} = \{4, 5, 6, 8\}^n$$

Tenemos entonces que $\# A = \# B = \# C = \# D = 4^n \leq N$ y $\# G = 8^n$.

En particular, tomaremos $N = 4^n$. Entonces el teorema 3.10 nos dice que

$$\# \{a - b | (a, b) \in G\} \leq 2^{\frac{11n}{3}}$$

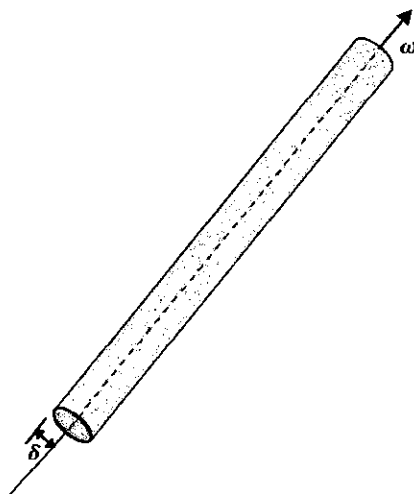
Esto es cierto ya que $\# \{a - b | (a, b) \in G\} \leq \# G \leq 8^n$ y

$$\bigwedge_{n \geq 0} 8^n \leq 2^{\frac{11n}{3}}$$

Observación 3.1

Aparentemente, como vemos en los ejemplos, dado que el valor de $\# \{a - b | (a, b) \in G\}$ depende de $\# G$ parecen innecesarios los teoremas anteriores. Debe notarse sin embargo que en los ejemplos 3.1 y 3.2 se da G explícitamente y aunque existe la cota trivial N^2 los teoremas la mejoran a $N^{2-\frac{1}{6}}$ y $N^{2-\frac{1}{4}}$ respectivamente.

Hasta aquí, aún estamos dentro de la aritmética combinatoria. Vamos a ver cómo relacionamos lo anterior con la dimensión de los conjuntos de Besicovitch en \mathbb{R}^n .

Fig. 3.1 Un δ -tubo

Empezamos discretizando al conjunto E de Besicovitch con una escala $0 < \delta \ll 1$. Sea Ω un subconjunto δ -separado maximal de S^{n-1} , de manera que $\# \Omega \sim \delta^{1-n}$. Para cada $\omega \in \Omega$, sea T_ω un tubo $\delta \times 1$ en la dirección de ω (fig. 3.1). El hecho de tomar a Ω como subconjunto δ -separado maximal de S^{n-1} nos sirve para asegurar que estos tubos T_ω son esencialmente disjuntos, es decir,

$$|T_\omega \cap T_{\omega'}| \lesssim \frac{\delta^2}{\delta + \angle(\omega, \omega')} \leq \delta$$

Lo último es debido a que $\omega, \omega' \in \Omega$ y Ω es δ -separado.

La idea para conectar los resultados anteriores y la dimensión de Minkowsky de los conjuntos de Kakeya se aprecia mejor en el siguiente gráfico. Se le conoce como la técnica de los "cortes" (ver figura 3.2)

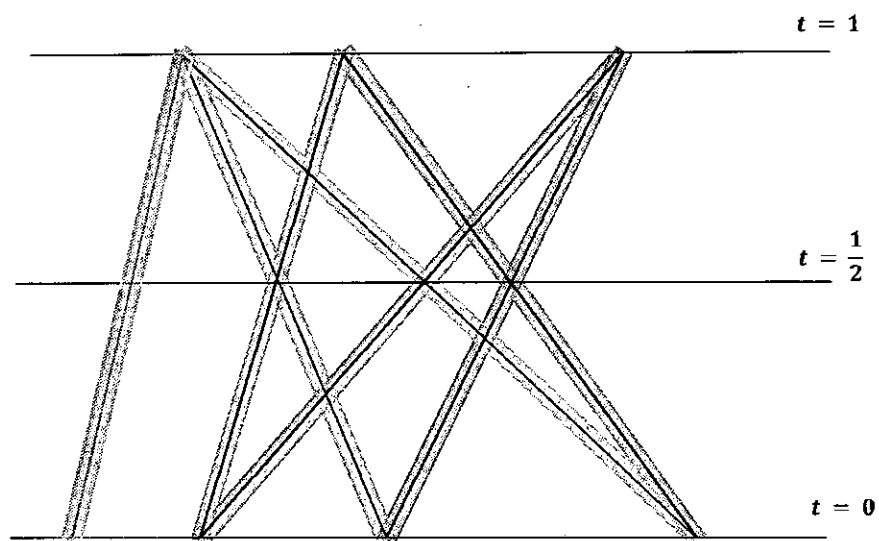


Fig. 3.2 Cortes transversales al conjunto discretizado de Kakeya E

Para todo $0 \leq t \leq 1$, definimos

$$\tilde{A}_t := E \cap \{x_n = t\} \quad (3.19)$$

Los conjuntos \tilde{A}_t son, esencialmente, uniones de discos $(n-1)$ – dimensionales de radio δ .

Tomemos un subconjunto δ – separado maximal $A_t \subset \tilde{A}_t$. Tenemos que

$$\# A_t \frac{n+1}{\delta} |S^{n-1}| = |\tilde{A}_t|$$

Donde $|S^{n-1}|$ representa el volumen de la esfera n – dimensional. Por lo tanto

$$\# A_t \sim \delta^{1-n} |\tilde{A}_t| \quad (3.20)$$

Así, debido a (3.19), podemos asumir que

$$\# A_0, \# A_1 \lesssim \delta^{1-n}|E|. \quad (3.21)$$

Además, cada tubo T_ω intercepta a A_0 en esencialmente un punto, el cual está en el eje del tubo. Por lo tanto, cada T_ω puede ser identificado con un par ordenado $(a_0, a_1) \in A_0 \times A_1$.

Sea $G \subset A_0 \times A_1$ el conjunto generado por esos tubos. Así

$$\# G \sim \delta^{1-n} \quad (3.22)$$

Comparando (3.21) con (3.4), vemos que $N = \delta^{1-n}|E|$. Por lo tanto, de (3.20) y (3.19) tenemos que

$$\# A_t \sim \delta^{1-n} |\tilde{A}_t| \lesssim \delta^{1-n}|E|$$

$$\# A_t \lesssim N$$

, para valores genéricos de t .

Supongamos que tenemos una expresión de la forma

$$\# G \lesssim N^\alpha$$

De (3.22) tenemos

$$\delta^{1-n} \lesssim (\delta^{1-n}|E|)^\alpha$$

De donde

$$|E| \gtrsim \delta^{\frac{(1-n)(1-\alpha)}{\alpha}} = \delta^{n - \left(\frac{n}{\alpha} + \frac{\alpha-1}{\alpha}\right)}$$

Vemos entonces que, por definición de dimensión de Minkowsky,

$$\underline{\dim}_{\mathcal{M}}(E) \geq \frac{n}{\alpha} + \frac{\alpha - 1}{\alpha}$$

Así pues, según (3.7), tenemos $\alpha = 2 - \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$ por lo que

$$\underline{\dim}_{\mathcal{M}}(E) \geq 6 \frac{n}{11} + \frac{5}{11} = 6 \frac{n-1}{11} + 1$$

Esto se mejora con (3.16) puesto que $\alpha = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$ lo cual da la estimación

$$\underline{\dim}_{\mathcal{M}}(E) \geq 4 \frac{n}{7} + \frac{3}{7} = 4 \frac{n-1}{7} + 1$$

3.3 Demostración de la Conjetura para el caso $n = 2$

Hay varios caminos para probar la conjetura para este caso en particular.

La prueba original la dio Davies en 1971. Usaremos el método de Dualidad el cual da una solución breve y elegante a este problema

Teorema 3.11 *La Conjetura de Kakeya en el caso $\beta(n) = 2$*

Un conjunto de Kakeya, o de Besicovitch, K en \mathbb{R}^2 tiene dimensión de Hausdorff y de Minkowsky igual a 2.

• *Demostración*

De (2.5) vemos que $|K| = 0$ ya que $Bu(S) = 0$ y (2.1) nos dice que K es Boreliano. Sea

$$H = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid L(a, b) \subset K\}$$

Dado que K contiene una línea en cada dirección, entonces $\text{Proy}_{\pi/2} H$ es todo el eje Y . Según (1.10) tenemos

$$\dim_{\mathcal{H}}(\text{Proy}_{\pi/2} H) \leq \min \{1, \dim_{\mathcal{H}} H\}$$

Pero como $\text{Proy}_{\pi/2} H = \text{eje } Y$ e además $\dim_{\mathcal{H}}(\text{Proy}_{\pi/2} H) = 1$, tenemos:

$$1 + \dim_{\mathcal{H}}(\text{Proy}_{\pi/2} H) \leq 1 + \min \{1, \dim_{\mathcal{H}} H\}$$

$$2 \leq 1 + \min \{1, \dim_{\mathcal{H}} H\}$$

Por lo que según el teorema 1.79

$$\dim_{\mathcal{H}} L(H) \geq \min \{2, 1 + \dim_{\mathcal{H}} H\} = 2$$

Finalmente, dado que $L(H) \subset K \subset \mathbb{R}^2$, tenemos:

$$2 \leq \dim_{\mathcal{H}} L(H) \leq \dim_{\mathcal{H}} K \leq \dim_{\mathcal{H}} \mathbb{R}^2 = 2$$

Por lo tanto $\dim_{\mathcal{H}} K = 2$.

Pero

$$2 = \dim_{\mathcal{H}}(K) \leq \underline{\dim}_{\mathcal{M}}(K) \leq \overline{\dim}_{\mathcal{M}}(K) \leq 2$$

Por lo que también

$$\dim_{\mathcal{M}}(K) = 2$$

■

DATE: 01/01/2011 TIME: 11:00 AM

Fig. 3.3 Thomas Wolff (1954 – 2000)

Introducimos el concepto de una "malla" o "grid" \mathbb{F}_q^n , el cual se define como

$$\mathbb{F}_q^n := \left\{ (a_1, \dots, a_n) \mid \bigwedge_{j=1, \dots, n} a_j \in \mathbb{F}_q \right\}$$

La figura 3.4 ilustra los casos $q = 5$ y $n = 2, 3$.

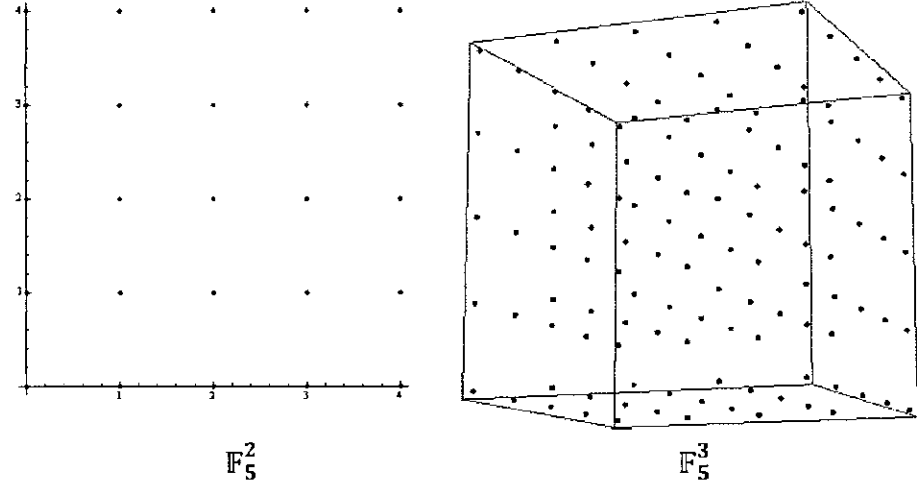


Fig. 3.4 \mathbb{F}_5^2 y \mathbb{F}_5^3

Se observa que n es el análogo a la dimensión de los conjuntos de Besicovitch en el caso euclidiano. Como vimos en los preliminares, $\# \mathbb{F}_q^n = q^n$ y podemos considerar a \mathbb{F}_q^n como un espacio vectorial sobre \mathbb{F} .

Introducimos la noción de lo que es una línea en \mathbb{F}_q^n . Como nos interesan direcciones tomaremos la ecuación vectorial de la recta de la siguiente manera: Sea $\vec{x}, \vec{v} \in \mathbb{F}_q^n$ con la condición que $\vec{v} \neq (0, \dots, 0)$. Definimos a la recta $L(\vec{x}, \vec{v})$ que pasa por \vec{x} en la dirección de \vec{v} :

$$L(\vec{x}, \vec{v}) := \{\vec{x} + t\vec{v} \mid t = 0, 1, \dots, q-1\} \quad (3.23)$$

Como ejemplo tomemos $q = 5$, $\vec{x} = (0, 1, 2)$ y $\vec{v} = (2, 3, 1)$. Entonces

$$L(\vec{x}, \vec{v}) = \{(0,1,2), (2,4,3), (4,2,4), (1,0,0), (3,3,1)\}$$

Esta línea se grafica en la figura 3.5.

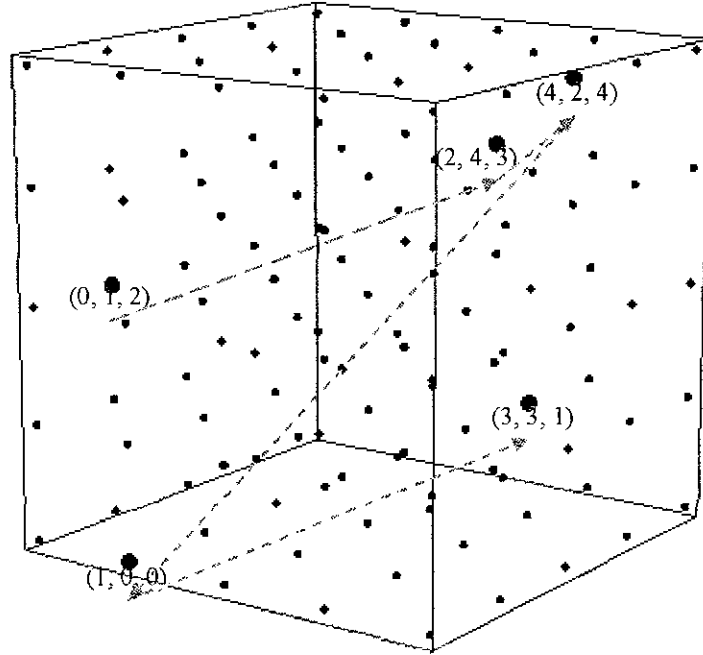


Fig. 3.5 Una línea en \mathbb{F}_5^3
(Las líneas punteadas son sólo referenciales)

Al igual que las líneas del espacio euclidiano, dos rectas distintas se interceptan en un solo punto o son disjuntas. Además, para un $\vec{x} \in \mathbb{F}_q^n$ pueden existir $\vec{v} \neq \vec{v}' \neq (0,0,\dots,0)$ tal que $L(\vec{x}, \vec{v}) = L(\vec{x}, \vec{v}')$. La condición es que $\vec{v} = \lambda \vec{v}'$ para algún $\lambda \in \mathbb{F}_q$.

Definición 3.12 Conjunto de Besicovitch en \mathbb{F}_q^n

Sea $K \subset \mathbb{F}_q^n$. Decimos que K es de Besicovitch si y solo si

$$\bigwedge_{\vec{v} \in \mathbb{F}_q^n} \bigvee_{\vec{x} \in \mathbb{F}_q^n} L(\vec{x}, \vec{v}) \subset K$$

En estos términos, la CKCF afirma lo siguiente.

Conjetura 3.13 La Conjetura de Kakeya para Campos Finitos

Sea $K \subset \mathbb{F}_q^n$. Entonces existe una constante C_n , independiente de q , tal que

$$\# K \geq C_n q^n$$

Examinemos el parecido entre esta conjetura y la de su par euclidiana. Como se recordará, la esencia de la conjetura de Kakeya euclidiana está en demostrar que la dimensión inferior de Minkowsky y la estimación inferior de Hausdorff es n , esta es la razón por la que en la conjetura 3.13 aparece el símbolo \geq .

El mismo Wolff dio una cota para el tamaño de K la cual es de la forma

$$\# K \geq C_n q^{\frac{n+2}{2}}$$

Sin embargo, debe notarse que en su demostración llega a una expresión de la forma $\# K \geq q^{\frac{n+2}{2}}$ desde donde se deduce la existencia de la constante C_n y usa además métodos geométricos.

La cota propuesta por Wolff fue posteriormente mejorada para valores generales de n y para específicos como $n = 3$ y 4 .

Para n general, la mejor cota obtenida fue $C_n q^{\frac{4n}{7}}$, la cual fue obtenida a partir del resultado de la sección anterior para el caso euclidiano. Como

es de esperar, el principal método para obtener tales cotas fue el de la aritmética combinatoria.

En 2008, Zeev Dvir, empleando una aproximación totalmente distinta, probó la CKCF usando el método polinomial. Esta prueba fue posteriormente mejorada y utilizada para resolver dos problemas en el espacio euclidiano: La conjetura de Kakeya Multilineal y la conjetura de las uniones.

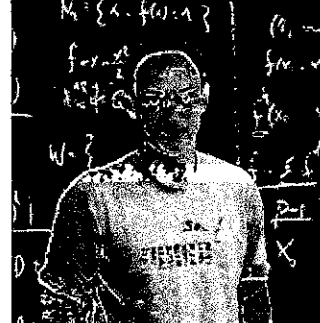


Fig. 3.6 Zeev Dvir

3.5 Demostración de la Conjetura de Kakeya para Campos Finitos.

3.5.1 Demostración usando el método polinomial

Comenzamos con la prueba de la CKCF que aparece en [Dvi08]. La constante C_n que se obtuvo en ese trabajo no es óptima y fue mejorada en trabajos subsiguientes.

La prueba usa el método polinomial, el cual trabaja, en general, mediante interpolar un polinomio de bajo grado no idénticamente nulo pero que se anula sobre el conjunto en cuestión, y entonces se procede a derivar una contradicción mostrando que el polinomio tiene también muchos ceros y así que debe ser idénticamente nulo. La prueba original aparecida en [Dvi08] da una cota ligeramente menor que la que aparece en esta sección.

Para interpolar el polinomio que se anula en K usaremos el siguiente lema

Lema 3.14: Sea $S \subset \mathbb{F}_q^n$ tal que

$$\# S < \binom{d+n}{n}$$

Entonces existe un polinomio $g(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_n]$ no idénticamente nulo y de grado $\leq d$ tal que

$$\bigwedge_{\vec{x} \in S} g(\vec{x}) = 0$$

Demostración

En primer lugar, averigüemos cual es el número de monomios en n variables de grado a lo más d .

Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq m \leq d$. Según el lema 1.62 el número de monomios en n variables de grado m es:

$$\binom{n-1+m}{m}$$

Por lo que el número de monomios en n variables de grado a lo más d es

$$\sum_{m=0}^d \binom{n+m-1}{m} = \sum_{m=0}^d \binom{n+m-1}{n-1} = \binom{n+d}{n}$$

Las restricciones $g(a) = 0$ para $a \in S$ son todas homogéneas y lineales en los coeficientes de g .

El número de restricciones viene dado por el cardinal de S ya que g se anula en cada elemento de ese conjunto. Adicionalmente, el número de coeficientes de g viene dado por el número $\binom{n+d}{n}$.

Por consiguiente, puesto que hay más coeficientes que restricciones, podemos encontrar una solución no idénticamente nula, es decir, no trivial satisfaciendo todas estas restricciones.

■

Ejemplo 3.4

Consideremos \mathbb{F}_5^2 , $d = 2$. Según el lema anterior, escogemos $S \subset \mathbb{F}_5^2$ tal que

$$\# S < \binom{4}{2} = 6$$

Sea $S = \{(0,2), (1,3)\}$ y $g(x_1, x_2) \in \mathbb{F}_5[x_1, x_2]$ definido como:

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2) &= \sum_{i_1+i_2 \leq 2} c_{i_1 i_2} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \\ &= c_{00} x_1^0 x_2^0 + c_{01} x_1^0 x_2^1 + c_{02} x_1^0 x_2^2 \\ &\quad + c_{10} x_1^1 x_2^0 + c_{11} x_1^1 x_2^1 + c_{20} x_1^2 x_2^0 \end{aligned}$$

Tomemos $(x_1, x_2) = (0,2)$ y $(y_1, y_2) = (1,3)$. Entonces las restricciones serán:

$$g(0,2) = 0$$

$$g(1,3) = 0$$

Es decir,

$$c_{00} + 2c_{01} + 4c_{02} = 0$$

$$c_{00} + 3c_{01} + 4c_{02} + c_{10} + 3c_{11} + c_{20} = 0$$

Lo que cual es equivalente a:

$$c_{01} + c_{10} + 3c_{11} + c_{20} = 0$$

Vemos claramente que hay soluciones no triviales para esta ecuación (en realidad, hay infinitas). Podemos tomar la solución

$$(c_{00}, c_{01}, c_{02}, c_{10}, c_{11}, c_{20}) = (3, 4, 1, 1, 2, 4)$$

Y por lo tanto a g como:

$$g(x_1, x_2) = 3 + 4x_2 + x_2^2 + x_1 + 2x_1x_2 + 4x_1^2$$

Necesitaremos también el lema de Schwartz-Zippel, el cual acota el conjunto de los ceros de un polinomio no idénticamente nulo. Como se mencionó en la sección 1.6, este lema constituye una generalización del teorema fundamental del álgebra.

Lema 3.15: Lema de Schwartz – Zippel.

Sea $g \in \mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio no idénticamente nulo de $n \geq 1$ variables de grado a lo más d y sea $S \subset \mathbb{F}_q$ no vacío. Sea $s_1, \dots, s_n \in S$ elegidos aleatoriamente de manera independiente. Entonces

$$\Pr(g(s_1, \dots, s_n) = 0) \leq \frac{d}{\# S}$$

Demostración

La demostración es por inducción sobre el número de variables. Para $n = 1$, tenemos el archiconocido teorema fundamental de álgebra. Para $n \geq 2$, según la observación 1.1, podemos escribir a g de la siguiente manera:

$$g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^d x_1^j g_j(x_2, \dots, x_n)$$

Para evitar confusiones con los sub índices, denotemos por i al grado de g , $1 \leq i \leq d$. Dado que g tiene grado i , el polinomio maximal de entre los g_j que no es idénticamente nulo es g_i , es decir, $g_j \equiv 0$ para toda $j > i$.

Sean s_1, \dots, s_n escogidos de forma en que indica el lema. Definimos los siguientes eventos:

$$A := \bigwedge_{j=0, \dots, d} g_j(s_2, \dots, s_n) = 0$$

$$B := g(s_1, \dots, s_n) = 0$$

Así, con estos convenios, necesitamos calcular $\Pr(B)$.

De la definición de i , vemos que debido a que g es de grado a lo más d y x_1 es de grado i , tenemos que el grado de g_i es a lo más $d - i$. Además, puesto que la probabilidad de un evento cualquiera se encuentra siempre entre 0 y 1, aplicando la hipótesis inductiva sobre g_i tenemos de la definición de probabilidad condicional

$$\Pr(B \wedge A) = \Pr(A) \Pr(B|A) \leq \Pr(A) \leq \Pr(g_i(s_2, \dots, s_n) = 0) \leq \frac{d-i}{\# S}$$

De la definición de A , si no todos los $g_j(s_2, \dots, s_n)$ son cero entonces el polinomio

$$\sum_{j=0}^d x_1^j g_j(s_2, \dots, s_n)$$

, debido a la definición de i , es univariable con grado a lo más i . Entonces

$$\Pr(B \wedge A^c) = \Pr(A^c) \Pr(B|A^c) \leq \Pr(B|A^c) \leq \frac{i}{\# S}$$

Por consiguiente, del teorema 1.59

$$\Pr(B) = \Pr(B \wedge A) + \Pr(B \wedge A^c) \leq \frac{d-i}{\# S} + \frac{i}{\# S} = \frac{d}{\# S}$$

■

Ejemplo 3.4

Consideremos \mathbb{F}_5^2 , $d = 2$, $S = \{0, 2, 3, 4\}$ y $g(x_1, x_2) \in \mathbb{F}_5[x_1, x_2]$ definido como en el ejemplo 3.15, es decir:

$$g(x_1, x_2) = 3 + 4x_2 + x_2^2 + x_1 + 2x_1x_2 + 4x_1^2$$

Para verificar el lema de Schwartz – Zippel, utilizaremos el siguiente comando creado en *Mathematica* llamado *Zippel*:

```

g = Mod[3 + 4 #2 + #2^2 + #1 + 2 #1 #2 + 4 #1^2, 5] &
Mod[3 + 4 #2 + #2^2 + #1 + 2 #1 #2 + 4 #1^2, 5] &

Zippel[S_List] := Module[{lista, vec},
  lista = Table[RandomChoice[S, 2], {i, 1, 20}];
  vec = Map[g@@# &, lista, {1}];
  Count[vec, 0] / Length[lista] // N
]

Zippel[{0, 2, 3, 4}]

0.25

Table[Zippel[{0, 2, 3, 4}], {i, 1, 100}]
{0.15, 0.2, 0.1, 0.3, 0.4, 0.15, 0.1, 0.25, 0.2, 0.1, 0.05, 0.3, 0.15,
0.15, 0.2, 0.25, 0.15, 0.15, 0.1, 0.15, 0.1, 0.15, 0.2, 0.3, 0.15,
0.2, 0.35, 0.25, 0.3, 0.05, 0.2, 0.2, 0.25, 0.1, 0.1, 0.25, 0.4, 0.1,
0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.15, 0.2, 0.1, 0.1, 0.05, 0.15, 0.2, 0.35, 0.2,
0.2, 0.2, 0.25, 0.15, 0.25, 0.2, 0.15, 0.2, 0.2, 0.25, 0.25, 0.1,
0.2, 0.05, 0.3, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.4, 0.1, 0.3, 0.15,
0.25, 0.1, 0.2, 0.15, 0.35, 0.35, 0., 0.3, 0.2, 0.3, 0.1, 0.15, 0.25,
0.15, 0.2, 0.2, 0.05, 0.1, 0.1, 0.15, 0.25, 0.2, 0.35, 0.2, 0.25}

```

Fig. 3.7 Comprobación de la versión probabilística
del lema de Schwartz - Zippel

La última salida muestra las probabilidades que son el resultado de aplicar cien veces las hipótesis del lema de Schwartz - Zippel al conjunto S . Note que el lema asegura que dichas probabilidades son menores o iguales que $\frac{d}{\#S} = \frac{2}{4} = 0.5$.

Utilizaremos la siguiente forma del lema de Schwartz - Zippel:

Corolario 3.16:

Sea $g(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio no idénticamente nulo con grado a lo más d . Entonces

$$\# \{ \vec{x} \in \mathbb{F}_q^n \mid g(\vec{x}) = 0 \} \leq d q^{n-1}$$

Demostración

Sea B como en el lema 3.15. Tomamos $S = \mathbb{F}_q$ y aplicamos la definición de probabilidad:

$$\Pr(B) = \frac{\# \{ \vec{x} \in \mathbb{F}_q^n \mid g(\vec{x}) = 0 \}}{\# \mathbb{F}_q^n} \leq \frac{d}{\# \mathbb{F}_q}$$

, de donde,

$$\# \{ \vec{x} \in \mathbb{F}_q^n \mid g(\vec{x}) = 0 \} \leq d q^{n-1}$$

■

Estamos ahora listos a probar la CKCF.

Teorema 3.17: Sea $K \subset \mathbb{F}_q^n$ un conjunto de Kakeya, entonces

$$\# K \geq \frac{1}{n!} q^n$$

Demostración

Lo demostraremos usando el método polinomial.

Procederemos según los tres pasos descritos en la sección 1.4.1.

Paso 1

Por reducción al absurdo, supongamos en contradicción que

$$\# K < \frac{1}{n!} q^n < \binom{q-1+n}{n}$$

Entonces, usando lema 3.14, podemos encontrar un polinomio $g(\vec{x})$ no idénticamente nulo de grado $d \leq q-1$ que se anula en K definido de la siguiente manera:

$$g(\vec{x}) := g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sum_{j=1}^n i_j \leq d} c_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$$

Vamos a descomponer a g en dos partes:

$$g = g_{=d} + g_{<d}$$

donde $g_{=d}$ es la parte homogénea de g , es decir, todos aquellos términos cuyo grado absoluto es exactamente d ; y por otra parte $g_{<d}$ la cual consta de todos los términos con grado absoluto menor que d , es decir:

$$g_{=d}(x_1, \dots, x_n) := \sum_{\sum_{j=1}^n i_j = d} c_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \quad (3.24)$$

$$g_{<d}(x_1, \dots, x_n) := \sum_{\sum_{j=1}^n i_j < d} c_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$$

Paso 2

Procedemos ahora a considerar la restricción de g para líneas en diferentes direcciones que están contenidas K . Sea $\vec{b} \in \mathbb{F}_q^n$ una dirección y sea $\vec{a} \in \mathbb{F}_q^n$ tal que

$$\{\vec{a} + t \vec{b} \mid t \in \mathbb{F}_q\} \subset K$$

La restricción de g a esta línea (que pasa por \vec{a} en la dirección \vec{b}) es un polinomio univariable definido por:

$$\begin{aligned} h_{\vec{a}, \vec{b}}(t) &:= g(\vec{a} + t \vec{b}) = g(a_1 + t b_1, \dots, a_n + t b_n) \\ &= \sum_{\sum_{j=1}^n i_j \leq d} c_{i_1, \dots, i_n} (a_1 + t b_1)^{i_1} \dots (a_n + t b_n)^{i_n} \end{aligned}$$

Dado que cada $a_j + t b_j$ es lineal, el coeficiente del monomio t^d en $h_{\vec{a}, \vec{b}}$, según (3.24), es precisamente $g_{=d}(b_1, \dots, b_n) = g_{=d}(\vec{b})$. Por consiguiente,

$$h_{\vec{a}, \vec{b}}(t) = g_{=d}(\vec{b}) t^d + O(t^{d-1}) \quad (3.25)$$

Debido a que $h_{\vec{a}, \vec{b}}(t) = g(\vec{a} + t \vec{b})$, $\vec{a} + t \vec{b} \in K$ y g se anula en K , tenemos que

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{F}_q} h_{\vec{a}, \vec{b}}(t) = 0$$

Es decir, $h_{\vec{a}, \vec{b}}$ tiene q ceros. Esto implica que $h_{\vec{a}, \vec{b}}$ es idénticamente nulo, ya que si no lo fuera, dado que el grado de $h_{\vec{a}, \vec{b}}$ según (3.25) es d entonces por el teorema fundamental del álgebra, o por el caso

unidimensional del lema de Schwartz – Zippel, $h_{\vec{a}, \vec{b}}$ podría tener a lo sumo $d \leq q - 1 < q$ ceros.

Paso 3

Dado que $h_{\vec{a}, \vec{b}}$ es idénticamente nulo, su coeficiente principal, $g_d(\vec{b})$, tiene que ser cero. Puesto que $\vec{b} \in \mathbb{F}_q^n$ es arbitraria, concluimos entonces que g_d se anula en todo el espacio \mathbb{F}_q^n . Esto contradice el corolario 3.16, ya que al ser g_d no idénticamente nulo y tener grado $d \leq q - 1$ entonces puede tener a lo sumo $(q - 1)q^n$ ceros, lo cual es menor que q^n .



Como se mencionó al principio de esta sección, la constante $C_n = \frac{1}{n!}$ del teorema 3.17 no es óptima. Como se ha visto, para demostrar la conjetura de Kakeya se utilizó en principio el método polinomial. En [DKSS09] se introduce una mejora de este método: *el método de las multiplicidades extendido*. Como lo indica su nombre, este método es la extensión del *método de las multiplicidades*. Veamos algunas semejanzas y diferencias.

Lo común a los tres métodos es que se llevan a cabo en tres etapas. Sin embargo hay diferencias importantes:

La diferencia entre el método de multiplicidades y el polinomial, el cual se describe en la sección 1.4.1, es que el polinomio construido en el paso 1 se anula en cada punto de K con alta multiplicidad (En el método

polinomial, la multiplicidad es igual a 1). Para satisfacer esta condición se requiere la utilización de polinomios de grado más alto que los utilizados en el método polinomial. Sin embargo, la ventaja de usar ceros de alta multiplicidad es que es más fácil concluir que el polinomio se anula también en otros puntos fuera de K .

En el método de multiplicidades extendido, en el paso 1 se procede igual que en el método de multiplicidades, pero la diferencia radica que en el paso 2, el polinomio construido se anula en otros puntos fuera de K también con alta multiplicidad. Las cotas en los parámetros de interés que se obtienen en esta vía son mejores que las de los otros dos métodos.

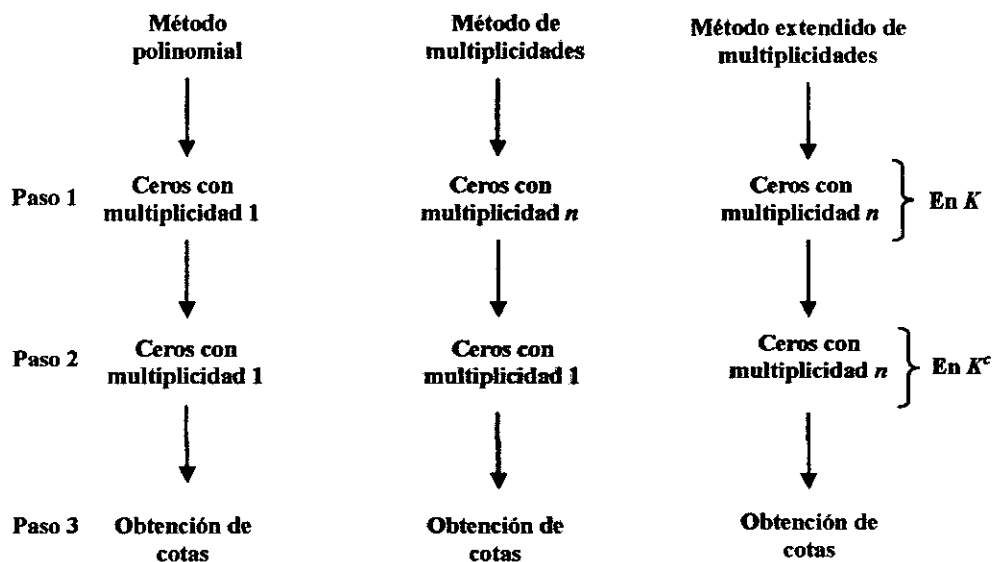


Fig. 3.8 Comparación entre el método polinomial, el de multiplicidades y el de multiplicidades extendido

Veamos como el uso de ceros con alta multiplicidad mejora los valores de C_n . En lo que sigue, sea \mathbb{F} cualquier campo y \mathbb{F}_q como antes.

3.5.2 Derivada de Hasse y Multiplicidades

3.5.2.1 Derivada de Hasse para polinomios en una indeterminada

Parece extraña la necesidad de una derivada especial para polinomios en una indeterminada, en especial para aquellos cuyos coeficientes están en un campo finito, pues empleando la derivada formal de polinomios, si

$$P(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j \Rightarrow P'(x) = \sum_{j=1}^n j a_j x^{j-1}$$

Como es de esperarse, esta derivada cumple las mismas reglas que la derivada usual, como por ejemplo la regla del producto. Sin embargo, se pierden otras muy importantes. Por ejemplo, si \mathbb{F} es de característica finita m , el polinomio $P(x) = x^{m+1}$ satisface $P'(x) = 0$ pero $P(x)$ no es un polinomio constante. Es decir, el teorema de la identidad no es cierto en este caso.

Para evitar estos inconvenientes, se define un tipo especial de derivada:

Definición 3.18 k – ésima derivada univariable de Hasse

Sea \mathbb{F} un campo cualquiera y $P(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j \in \mathbb{F}[x]$ y $k \in \mathbb{N}_0$.

Definimos

$$D^{(k)}P(x) := \sum_{j=k}^n \binom{j}{k} a_j x^{j-k} \in \mathbb{F}[x]$$

La función $D^{(k)}: \mathbb{F}[x] \rightarrow \mathbb{F}[x]$ se llama la k – ésima derivada de Hasse

La derivada de Hasse cumple las siguientes propiedades

Teorema 3.19

Sean $P, Q \in \mathbb{F}[x]$, $\alpha \in \mathbb{F}$ y $k, l \in \mathbb{N}_0$. Entonces:

1. $D^{(k)}$ es \mathbb{F} – lineal, es decir,

$$1.1 \ D^{(k)}(P + Q) = D^{(k)}P + D^{(k)}Q$$

$$1.2 \ D^{(k)}(\alpha P) = \alpha D^{(k)}P$$

2. $k! D^{(k)}P = P^{(k)}$. En particular, $D^{(1)}P = P'$

3. $D^{(k)}D^{(l)}P = \binom{k+l}{l} D^{(k+l)}P$

4. Regla de Leibniz

$$D^{(k)}(PQ) = \sum_{i=0}^k D^{(i)}P D^{(k-i)}Q$$

Más generalmente, para $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{F}[x]$

$$D^{(k)} \prod_{i=1}^r P_i = \sum_{m_1 + \dots + m_r = k} \prod_{i=1}^r D^{(m_i)}P_i$$

Ejemplo 3.5

Sea $f \in \mathbb{Z}_5[x]$ definido como:

$$f(x) = x^7 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2$$

Tenemos entonces que la k – ésima derivada de Hasse de f es:

$$D^{(k)}f(x) = \sum_{j=k}^7 \binom{j}{k} a_j x^{j-k}$$

Para $k = 1$ tenemos que

$$\begin{aligned}
 D^{(1)}f(x) &= \sum_{j=1}^7 \binom{j}{1} a_j x^{j-1} \\
 &= \binom{1}{1} a_1 x^{1-1} + \binom{2}{1} a_2 x^{2-1} + \binom{3}{1} a_3 x^{3-1} + \binom{4}{1} a_4 x^{4-1} \\
 &\quad + \binom{5}{1} a_5 x^{5-1} + \binom{6}{1} a_6 x^{6-1} + \binom{7}{1} a_7 x^{7-1} \\
 &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + a_6 x^5 + 2a_7 x^6 = f'(x)
 \end{aligned}$$

Para $k = 2$,

$$\begin{aligned}
 D^{(2)}f(x) &= \sum_{j=2}^7 \binom{j}{2} a_j x^{j-2} \\
 &= \binom{2}{2} a_2 x^{2-2} + \binom{3}{2} a_3 x^{3-2} + \binom{4}{2} a_4 x^{4-2} + \binom{5}{2} a_5 x^{5-2} \\
 &\quad + \binom{6}{2} a_6 x^{6-2} + \binom{7}{2} a_7 x^{7-2} \\
 &= a_2 + 3a_3 x + a_4 x^2 + a_7 x^5 = \frac{f''(x)}{2!}
 \end{aligned}$$

Para $k = 6$,

$$D^{(6)}f(x) = \sum_{j=6}^7 \binom{j}{6} a_j x^{j-6} = \binom{6}{6} a_6 x^{6-6} + \binom{7}{6} a_7 x^{7-6} = a_6 + 7a_7 x$$

3.5.2.2 Derivada Parcial Multivariable de Hasse

La noción de derivada de Hasse se generaliza de la siguiente manera.

Definición 3.20 $wt(\vec{k}), \vec{x}^{\vec{k}}, \binom{\vec{i}}{\vec{j}}$

Sea $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ una n – upla de indeterminadas y $\vec{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Definimos lo siguiente:

$$wt(\vec{k}) := \sum_{j=1}^n k_j \in \mathbb{N}_0$$

$$\vec{x}^{\vec{k}} := x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} \in \mathbb{F}[\vec{x}]$$

Si $\vec{i} = (i_1, \dots, i_n)$ y $\vec{j} = (j_1, \dots, j_n)$ entonces

$$\binom{\vec{i}}{\vec{j}} := \prod_{k=1}^n \binom{i_k}{j_k}$$

Definición 3.21 Grado y componente homogénea maximal

Si el **grado** de $P(\vec{x}) \in \mathbb{F}[\vec{x}]$ es d , escribimos $grad(P(\vec{x})) = d$ y $Hom_p = P_{=d}$, es decir, Hom_p es la **componente homogénea maximal**, en el sentido de que es la que tiene el más alto grado.

Ejemplo 3.6

Sea $p = x_1 + 4x_2^3 + 3x_1x_2x_3^4 + 6x_4 + 4x_5^2$.

Entonces $Hom_p = 3x_1x_2x_3^4$

Definición 3.22 Derivada Parcial multivariable de Hasse

Sean \vec{x} y \vec{z} n – uplas de indeterminadas, $P \in \mathbb{F}[\vec{x}]$ y $\vec{k} \in \mathbb{N}_0^n$. La \vec{k} – ésima derivada parcial multivariable de Hasse de P , denotada por $P^{(\vec{k})}(\vec{x})$ es el coeficiente de $\vec{z}^{\vec{k}}$ en $P(\vec{x} + \vec{z})$. En otras palabras

$$P(\vec{x} + \vec{z}) = \sum_{\vec{k}} p^{(\vec{k})}(\vec{x}) \vec{z}^{\vec{k}}$$

Ejemplo 3.7

Con p igual que el ejemplo 3.6, sea $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ y $\vec{z} = (z_1, \dots, z_n)$. Si $\vec{k} = (1, 2, 3, 4, 1)$ entonces $p^{(\vec{k})}(\vec{x}) = 0$. Si $\vec{k} = (1, 1, 3, 0, 0)$ entonces $p^{(\vec{k})}(\vec{x}) = 12x_3$.

Para ver que la derivada de la definición 3.22 es una generalización de la definición 3.19, tomemos $\vec{x} = (x, \dots, x)$ y $\vec{z} = (z, \dots, z)$. Entonces la tercera derivada univariable de Hasse es $4 + 60x^3 = p^{(3,0,0,0,0)}(\vec{x})$

La derivada de Hasse cumple las siguientes propiedades

Teorema 3.23

Sea $P, Q \in \mathbb{F}[\vec{x}]$ e \vec{k}, \vec{l} vectores de enteros no negativos. Entonces:

1. $P^{(\vec{k})}(\vec{x}) + Q^{(\vec{k})}(\vec{x}) = (P + Q)^{(\vec{k})}(\vec{x})$
2. Si P es homogéneo de grado d , entonces $P^{(\vec{k})}$ es homogéneo de grado $d - \text{wt}(\vec{k})$
3. $(\text{Hom}_P)^{(\vec{k})}(\vec{x}) = \text{Hom}_{P^{(\vec{k})}}(\vec{x})$
4. $\left(P^{(\vec{k})}\right)^{(\vec{l})}(\vec{x}) = \binom{\vec{k}+\vec{l}}{\vec{l}} P^{(\vec{k}+\vec{l})}(\vec{x})$

Demostración

Para la primera parte

$$\begin{aligned} P(\vec{x} + \vec{z}) + Q(\vec{x} + \vec{z}) &= \sum_{\vec{k}} P^{(\vec{k})}(\vec{x}) \vec{z}^{\vec{k}} + \sum_{\vec{k}} Q^{(\vec{k})}(\vec{x}) \vec{z}^{\vec{k}} \\ &= \sum_{\vec{k}} \left(P^{(\vec{k})}(\vec{x}) + Q^{(\vec{k})}(\vec{x}) \right) \vec{z}^{\vec{k}} \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$(P + Q)(\vec{x} + \vec{z}) = \sum_{\vec{k}} (P + Q)^{(\vec{k})}(\vec{x}) \vec{z}^{\vec{k}}$$

Comparando los coeficientes,

$$P^{(\vec{k})}(\vec{x}) + Q^{(\vec{k})}(\vec{x}) = (P + Q)^{(\vec{k})}(\vec{x})$$

Para la segunda parte,

$$P(\vec{x} + \vec{z}) = \sum_{\vec{k}} P(\vec{k})(\vec{x}) \vec{z}^{\vec{k}}$$

Como $\text{grad}(P) = d$ y $\text{grad}(\vec{z}^k) = \text{wt}(\vec{k})$, entonces

$$\text{grad}\left(P^{(\vec{k})}\right) = d - \text{wt}(\vec{k})$$

Al combinar estas dos partes, resulta la tercera.

Para la última,

$$\begin{aligned}
 P(\vec{x} + (\vec{z} + \vec{w})) &= \sum_{\vec{k}} P^{(\vec{k})}(\vec{x})(\vec{z} + \vec{w})^{\vec{k}} = \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{i} + \vec{j} = \vec{k}} P^{(\vec{k})}(\vec{x}) \binom{\vec{k}}{\vec{i}} \vec{z}^{\vec{j}} \vec{w}^{\vec{i}} \\
 &= \sum_{\vec{i}, \vec{j}} P^{(\vec{i} + \vec{j})}(\vec{x}) \binom{\vec{i} + \vec{j}}{\vec{i}} \vec{z}^{\vec{j}} \vec{w}^{\vec{i}}
 \end{aligned}$$

Por otro lado

$$P(\vec{x} + \vec{z}) = \sum_i P^{(i)}(\vec{x}) \vec{z}^i = \sum_i \sum_j (P^{(i)})^{(j)}(\vec{x}) \vec{z}^j \vec{z}^i$$

Comparando los coeficientes de $\bar{z}^j \bar{w}^i$, tenemos el resultado buscado.

3.5.2.3 Multiplicidades

Sabemos que un polinomio univariable $h(t)$ se anula con multiplicidad m en un punto $a \in \mathbb{F}_q$ si y sólo si $h(t)$ es divisible por $(t - a)^m$. Esto implica, en particular, que un polinomio univariable de grado d puede tener a lo más d ceros contando multiplicidades.

La generalización de la noción de multiplicidades para el caso multivariable es como sigue:

Definición 3.24 Multiplicidad de un cero de un polinomio

Sea $P \in \mathbb{F}[\vec{x}]$ un polinomio no constante, $\vec{a} \in \mathbb{F}^n$ y $\vec{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Denotamos a la **multiplicidad de P en \vec{a}** mediante $\text{mul}(P, \vec{a})$ definida por las siguientes condiciones: Sea M un entero. $\text{mul}(P, \vec{a}) = M$ si y sólo si:

$$(1) \quad \bigwedge_{\substack{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^n \\ k_1 + \dots + k_n < M}} P^{(\vec{k})}(\vec{a}) = 0$$

$$(2) \quad \bigvee_{\substack{\vec{k} \in \mathbb{N}_0^n \\ k_1 + \dots + k_n = M}} P^{(\vec{k})}(\vec{a}) \neq 0$$

Si P es un polinomio constante entonces $\text{mul}(P, \vec{a}) = \infty$.

En palabras, decimos que un polinomio $P \in \mathbb{F}[\vec{x}]$ se anula con multiplicidad M en un punto $\vec{a} \in \mathbb{F}^n$ si el polinomio trasladado $P(\vec{x} + \vec{a})$ contiene únicamente monomios de grado M y superior. Así pues, $\text{mul}(P, \vec{a})$ se define como el mayor M tal que P se anule en \vec{a} con multiplicidad M .

Las propiedades de las multiplicidades, las cuales se derivan de las derivadas de Hasse, son las siguientes:

Teorema 3.25 Sea $P(\vec{x}) \in \mathbb{F}_q[\vec{x}]$, $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{F}_q^n$ e $\vec{i} = (i_1, \dots, i_n)$

1. Si $\text{mul}(P, \vec{a}) = m$ entonces $\text{mul}(P^{(\vec{i})}, \vec{a}) \geq m - \text{wt}(\vec{i})$
2. Sea $P_{\vec{a}, \vec{b}}(t) := P(\vec{a} + t \vec{b}) \in \mathbb{F}_q[t]$ entonces

$$\bigwedge_{s \in \mathbb{F}_q} \text{mul}(P_{\vec{a}, \vec{b}}, s) \geq \text{mul}(P, \vec{a} + s \vec{b})$$

3.5.3 Demostración usando multiplicidades

Como ejemplo de la utilización de ceros con alta multiplicidad, probamos el resultado de [SS08]. La prueba empieza interpolando un polinomio de grado bajo (esta vez delimitando los grados individuales en lugar del grado total) que se anula en K con alta multiplicidad. Esto se logra con el siguiente lema.

Lema 3.26 Sea $S \subset \mathbb{F}_q^n$ tal que

$$\# S < \frac{q^n}{\binom{m+n-1}{n}}$$

Entonces existe un polinomio $g \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ tal que $\text{mul}(g, \vec{a}) \geq m$ para toda $\vec{a} \in S$ y tal que g tiene los grados individuales a lo más $q - 1$ (es decir, cada variable aparece con grado a lo más $q - 1$).

Demostración

Como en el lema 3.14, g será encontrada al resolver un sistema determinado por pocas ecuaciones de primer grado homogéneas. Cada condición de la forma $\text{mul}(g, \vec{a}) \geq m$ corresponde a las $\binom{m+n-1}{n}$ restricciones lineales homogéneas (en los coeficientes de g) requiriendo que los coeficientes de monomios de grado menor que m en $g(\vec{x} + \vec{a})$ sean cero (una condición por el monomio). En total, tenemos $\# S \binom{m+n-1}{n}$ restricciones, lo cual es más pequeño que q^n - el número de coeficientes en g (ya que cada variable puede aparecer con grado entre 0 y $q-1$). Por lo tanto el sistema tiene una solución no trivial.

■

Se usará el siguiente lema, lo cual será usado en lugar del lema de Schwartz-Zippel.

Lema 3.27 Sea $g \in \mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio no idénticamente nulo con grados individuales de a lo sumo $q-1$. Entonces existe un punto $\vec{a} \in \mathbb{F}_q^n$ tal que $g(\vec{a}) \neq 0$.

Teorema 3.28 Sea $K \subset \mathbb{F}^n$ un conjunto de Kakeya, entonces

$$\# K \geq \frac{1}{4^n} q^n$$

Demostración

Lo haremos nuevamente por reducción al absurdo. Supongamos que

$$\# K < \frac{q^n}{4^n} \leq \frac{q^n}{\binom{2n-1}{n}}$$

Del lema 3.26, podemos encontrar un polinomio no idénticamente nulo g con grados individuales acotados por $q - 1$ tal que $\text{mul}(g, \vec{a}) \geq n$ para cada $\vec{a} \in K$. Como antes, fijamos algún $\vec{b} \in \mathbb{F}_q^n$ y sea $\vec{a} \in \mathbb{F}_q^n$ tal que el conjunto $\{\vec{a} + t\vec{b} \mid t \in \mathbb{F}_q\}$ esté contenido en K . El polinomio $h_{\vec{a}, \vec{b}}(t) = g(\vec{a} + t\vec{b})$ ahora tiene q ceros de multiplicidad como mínimo n ya que la operación de restricción sólo pueda aumentar multiplicidades. Como el grado de $h_{\vec{a}, \vec{b}}$ es a lo sumo $n(q - 1)$ (la suma de grados individuales de g) llegamos a la conclusión $h_{\vec{a}, \vec{b}}$ es idénticamente nulo. Esto implica, como antes, que $g_{=\vec{a}}(\vec{b}) = 0$. Pero según el lema 3.27, $g_{=\vec{a}}$ no puede anularse en todas partes, lo cual es una contradicción. Esto completa la prueba. ■

3.5.4 Demostración usando el método de multiplicidades extendido

Como vimos en la sección previa, usar polinomios de alto grado (grado total $n(q - 1)$ en lugar de $q - 1$) trae como consecuencia una cota más ajustada en el tamaño de conjuntos de Kakeya. Es natural preguntarse si se puede llevar esta idea más lejos para así obtener mejores cotas.

A primera vista parece que no es posible, puesto que un polinomio no idénticamente nulo con grados individuales mayores que $q - 1$ puede potencialmente anularse en el todo el espacio (por ejemplo el polinomio $x_1^q - x_1$).

La solución está en usar una forma más general del lema de Schwartz-Zippel que es útil también para polinomios de grado más alto que el

tamaño del campo. Esto se hace, otra vez, considerando el caso más general de ceros con multiplicidades. También usaremos una versión del lema 3.14 esta vez con multiplicidades.

Lema 3.29 Sea $S \subseteq \mathbb{F}_q^n$ y m, d enteros no negativos tales que

$$\binom{m+n-1}{n} \# S < \binom{d+n}{n}$$

Entonces existe un polinomio no nulo $g \in \mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_n]$ con $\text{grad}(g) \leq d$ tal que $\text{mul}(g, \vec{a}) \geq m$ para cada $\vec{a} \in S$.

Demostración

El número de posibles monomios en g es $\binom{d+n}{n}$. Por lo tanto hay $\binom{d+n}{n}$ grados de libertad en la elección de los coeficientes de esos monomios. Para un punto dado \vec{a} , la condición $\text{mul}(g, \vec{a}) \geq m$ impone $\binom{m+n-1}{n}$ restricciones lineales homogéneas sobre los coeficientes de g . Dado que el número total de restricciones lineales es

$$\# S \binom{m+n-1}{n}$$

Entonces existe una solución no trivial.

■

Se usa la siguiente generalización del lema de Schwartz – Zippel.

Lema 3.30 Sea $g \in \mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio no idénticamente nulo de grado a lo más d . Entonces para cada $S \subseteq \mathbb{F}_q$,

$$\sum_{\vec{a} \in S^n} \text{mult}(g, \vec{a}) \leq d (\# S)^{n-1}$$

Demostración

Lo probaremos por inducción sobre n . Para $n = 1$, tenemos la conocida noción de multiplicidad para polinomios univariados: $\text{mult}(g, a) = m$ sii $(x - a)^m$ divide a $P(x)$. Por lo tanto

$$\sum_{a \in S} \text{mult}(g, a) \leq d$$

Sea ahora $n \geq 1$. Tal como en el lema 3.15, escribimos:

$$g(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^t g_j(x_1, \dots, x_{n-1}) x_n^j$$

, donde $0 \leq t \leq d$, $g_t(x_1, \dots, x_{n-1}) \neq 0$ y $\text{grad}(g_j) \leq d - j$.

Para cualesquiera $s_1, \dots, s_{n-1} \in S$, definamos

$$m_{s_1, \dots, s_{n-1}} := \text{mult}(g_t, (s_1, \dots, s_{n-1}))$$

Fijemos $a_1, \dots, a_{n-1} \in S$ y sea $\vec{i} = (i_1, \dots, i_{n-1})$ tal que $\text{wt}(\vec{i}) = m_{a_1, \dots, a_{n-1}}$ y $g_t^{(\vec{i})}(x_1, \dots, x_{n-1}) \neq 0$. Si definimos $(\vec{i}, 0) := (i_1, \dots, i_{n-1}, 0)$ entonces observamos

$$g^{(\vec{i}, 0)}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^t g_j^{(\vec{i})}(x_1, \dots, x_{n-1}) x_n^j$$

y por lo tanto $g^{(\vec{l},0)}$ es un polinomio no nulo.

Del teorema 3.25 tenemos que

$$\begin{aligned} \text{mult}(g(x_1, \dots, x_n), (a_1, \dots, a_n)) \\ \leq \text{wt}(\vec{l}, 0) + \text{mult}(g^{(\vec{l},0)}(x_1, \dots, x_n), (a_1, \dots, a_n)) \\ \leq m_{s_1, \dots, s_{n-1}} + \text{mult}(g^{(\vec{l},0)}(a_1, \dots, a_{n-1}, x_n), a_n) \end{aligned}$$

Sumando esto sobre todos los $a_n \in S$ y aplicando el caso $n = 1$ a el polinomio no nulo $g^{(\vec{l},0)}(a_1, \dots, a_{n-1}, x_n)$ obtenemos

$$\sum_{a_n \in S} \text{mult}(g, (a_1, \dots, a_{n-1})) \leq m_{a_1, \dots, a_{n-1}} \# S + t$$

Por lo tanto

$$\sum_{a_1, \dots, a_n \in S} \text{mult}(g, (a_1, \dots, a_n)) \leq \sum_{a_1, \dots, a_{n-1} \in S} m_{a_1, \dots, a_{n-1}} \# S + (\# S)^{n-1} t \quad (3.26)$$

Aplicando al hipótesis inductiva a g_t , tenemos que

$$\sum_{a_1, \dots, a_{n-1} \in S} m_{a_1, \dots, a_{n-1}} \leq \text{grad}(g_t)(\# S)^{n-2} \leq (d-t)(\# S)^{n-2} \quad (3.27)$$

Combinando (3.26) y (3.27) resulta que

$$\sum_{\vec{a} \in S^n} \text{mult}(g, \vec{a}) \leq (d-t)(\# S)^{n-1} + (\# S)^{n-1} t \leq d(\# S)^{n-1}$$

■

Corolario 3.31 Sea $g \in \mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio no idénticamente nulo de grado a lo más d y sea m un entero positivo. Si para cada $\vec{a} \in \mathbb{F}_q^n$ se cumple que $\text{mult}(g, \vec{a}) \geq m$ entonces

$$d \geq mq$$

Usaremos este corolario podemos mejorar el valor en C_n a $\frac{1}{2^n}$.

Teorema 3.32 Sea $K \subseteq \mathbb{F}_q^n$ un conjunto de Kakeya. Entonces

$$\# K \geq \left(\frac{q}{2 - \frac{1}{q}} \right)^n$$

Demostración

Sean los enteros $m, d \geq 0$ tales que

$$d < q \frac{qm - d}{q - 1} \quad (3.28)$$

Mostramos que

$$\binom{m+n-1}{n} \# K \geq \binom{n+d}{n} \quad (3.29)$$

Supongamos por contradicción que (3.29) es falso. Por consiguiente, debido al lema 3.29, existe un polinomio no nulo $g \in \mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_n]$ con $\text{grad}(g) \leq d$ que se anula en cada punto de K con una multiplicidad de por lo menos m .

Definimos $l := \frac{qm-d}{q-1}$ y $p := g^{(i)}$ y la i -ésima derivada de Hasse de g .

Fijemos $\vec{i} = (i_1, \dots, i_n)$ tal que $\text{wt}(\vec{i}) < l$.

Dado que K es un conjunto de Kakeya,

$$\bigwedge_{\vec{v} \in \mathbb{F}_q^n} \bigvee_{\vec{u} \in \mathbb{F}_q^n} \bigwedge_{t \in \mathbb{F}_q} \text{mult}(g, \vec{u} + t \vec{v}) \geq m$$

Dado que $\text{mult}(p, \vec{u} + t \vec{v}) \leq \text{mult}(p(\vec{u} + s \vec{v}), t)$, donde $p(\vec{u} + s \vec{v}) \in \mathbb{F}_q[s]$ tenemos que

$$\bigwedge_{\vec{v} \in \mathbb{F}_q^n} \bigvee_{\vec{u} \in \mathbb{F}_q^n} \bigwedge_{t \in \mathbb{F}_q} \text{mult}(p, \vec{u} + t \vec{v}) \geq m - \text{wt}(\vec{l})$$

Debido a que

$$\text{grad}(p(\vec{u} + s \vec{v})) \leq \text{grad}(p) \leq d - \text{wt}(\vec{l}) < q(m - \text{wt}(\vec{l}))$$

, del corolario 3.31, $p(\vec{u} + s \vec{v})$ es idénticamente nulo.

Como el coeficiente principal de $p(\vec{u} + s \vec{v})$ es $\text{Hom}_p(\vec{v})$, tenemos que $(\text{Hom}_g)^{(\vec{l})} = \text{Hom}_p$ es idénticamente nulo sobre \mathbb{F}_q^n . Esto muestra que todas las derivadas parciales multivariadas de Hasse de Hom_g de orden menor que l se anulan en \mathbb{F}_q^n , es decir, Hom_g se anula con multiplicidad de cómo mínimo l en cada punto de \mathbb{F}_q^n .

Por otra parte, de (3.28) tenemos

$$\text{grad}(\text{Hom}_g) = \text{grad}(g) \leq d < ql$$

Del corolario 3.31 concluimos que Hom_g es el polinomio nulo, lo cual es una contradicción debido a que la parte homogénea de un polinomio no nulo es no nula. Por consiguiente (3.29) es verdadera, es decir

$$\# K \geq \frac{\binom{n+d}{n}}{\binom{m+n-1}{n}}$$

Completamos la prueba escogiendo a d y m como sigue: Sea $\alpha = qR$, donde R es un entero tal que $R \rightarrow \infty$, es decir $\alpha \rightarrow \infty$ en múltiplos de R . Entonces escogemos

$$m = 2\alpha - \frac{\alpha}{q}$$

$$d = \alpha q - 1$$

Por consiguiente

$$\# K \geq \frac{\binom{n+d}{n}}{\binom{m+n-1}{n}} = \frac{\binom{n+\alpha q-1}{n}}{\binom{2\alpha - \frac{\alpha}{q} + n-1}{n}} = \frac{\prod_{i=1}^n (\alpha q - 1 + i)}{\prod_{i=1}^n (2\alpha - \frac{\alpha}{q} - 1 + i)}$$

Llevando al límite

$$\# K \geq \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \left(\frac{q - \frac{1}{\alpha} + \frac{i}{\alpha}}{2 - \frac{1}{q} - \frac{1}{\alpha} + \frac{i}{\alpha}} \right) = \left(\frac{q}{2 - \frac{1}{q}} \right)^n$$

Esto completa la prueba

■

Corolario 3.33 Sea $K \subset \mathbb{F}_q^n$ un conjunto de Kakeya. Entonces

$$\# K \geq \frac{1}{2^n} q^n$$

Demostración

$$\# K \geq \left(\frac{q}{2 - \frac{1}{q}} \right)^n = \left(\frac{1}{2 - \frac{1}{q}} \right)^n q^n \geq \frac{1}{2^n} q^n$$

■

3.6 Una aplicación de la CKCF

En la ciencia computacional, el interés en la CKCF proviene independientemente del análisis de la construcción de merges.

Definición 3.34 *Variable aleatoria*

Sea Ω un espacio muestral discreto, es decir finito o numerable, de eventos elementales. Cualquier función de valor real $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ se denomina **variable aleatoria**. La **variable aleatoria** es discreta si su conjunto imagen es finito o enumerable.

Observación 3.2

En lo sucesivo, se asumirá que la variable aleatoria discreta X está definida en un espacio muestral discreto Ω

Definición 3.35 *Soporte de una variable aleatoria*

El **soporte** de X , denotado por $\text{supp}(X) \subset \Gamma^n$, es el conjunto de valores en los cuales X tiene probabilidad no nula

Definición 3.36 Γ^n fuente aleatoria

Sea Γ un alfabeto finito. Una Γ^n fuente aleatoria es una variable aleatoria X que toma valores en Γ^n .

Definición 3.37 Auto información de una variable aleatoria

La auto información $I(X)$ es la medida del contenido de la información asociada con el resultado de la variable aleatoria X .

La auto información está expresada en unidades de información que son los bits, nats o hartleys, dependiendo de la base de logaritmos empleados en el cálculo de dicha medida.

Definición 3.38 Entropía de una variable aleatoria

La entropía H de una variable aleatoria discreta X con posibles valores $\{x_1, \dots, x_n\}$ es

$$H(X) = E(I(X))$$

Donde E es el valor esperado o esperanza de X

Por consiguiente, la entropía es la medida de incertidumbre asociada a una variable aleatoria.

Observación 3.3

Que una variable aleatoria tenga entropía alta significa por tanto que tiene un alto grado de incertidumbre. Por consiguiente, esto nos dice que la distribución de la variable aleatoria es uniforme, lo que hace difícil la ubicación de los puntos muestreados.

Definición 3.39 Distancia Estadística

Sean X e Y dos Γ^n fuentes aleatorias. La **distancia estadística** entre X e Y se define como:

$$\Delta(X, Y) := \frac{1}{2} \sum_{a \in \Gamma^n} |\Pr[X = a] - \Pr[Y = a]|$$

Definición 3.40 Min – entropía

Sea X una Γ^n fuente aleatoria. La **Min – entropía** de X se define como

$$H^\infty(X) := \min_{x \in \text{supp}(X)} \log_2 \left(\frac{1}{\Pr[X = x]} \right)$$

Por consiguiente, decimos que una Γ^n fuente aleatoria X tiene **min – entropía** $\geq b$ sii,

$$\bigwedge_{x \in \Gamma^n} \Pr[X = x] \leq 2^{-b}$$

Definición 3.41 (Γ^n, b) – Fuente

Se dice que X es una (Γ^n, b) – fuente si X es una Γ^n fuente aleatoria y $H^\infty(X) \geq b$

Definición 3.42 $(\Gamma^n, b)^{1:k}$ – Fuente

Una $(\Gamma^n, b)^{1:k}$ – fuente es una variable aleatoria $X = (X_1, \dots, X_k)$ tal que cada X_i es una Γ^n fuente aleatoria y al menos una de las X_i es de **min – entropía** $\geq b$.

Definición 3.43 Merge

Una función $M: \{0,1\}^d \times (\Gamma^n)^k \rightarrow \Gamma^m$ es una $[d, (\Gamma^n, b)^{1:k} \mapsto (\Gamma^m, b') \sim \gamma]$ –merger si para cada $(\Gamma^n, b)^{1:k}$ –fuente X y para una variable aleatoria independiente Z uniformemente distribuida sobre $\{0,1\}^d$, la distribución $M(X, Z)$ es γ – cerrada a una distribución de una (Γ^m, b') –fuente (es decir, su distancia estadística es $\leq \gamma$)

Asumimos que tenemos k variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_k cada una distribuida sobre \mathbb{F}_q^n . Todas estas variables están correlacionadas arbitrariamente, pero con la condición de que por lo menos una de ellas esté distribuida uniformemente, aunque no se sabe cuál.

La merge es entonces el procedimiento que junta a X_1, X_2, \dots, X_k y da como resultado una sola variable aleatoria Z , también sobre \mathbb{F}_q^n , de tal manera que Z tiene alta entropía.

De la definición 3.43, una merge puede usar una corta cadena aleatoria adicional, llamada *semilla*, con el propósito de computar la salida de Z . Por ejemplo, consideremos la merge que se computa de la siguiente manera: La semilla de la merge es un vector aleatorio $\vec{a} = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{F}_q^k$ y la salida es la combinación lineal

$$Z = a_1 Z_1 + \dots + a_k Z_k$$

Es decir, para unir k entradas, tomamos un elemento aleatorio en un sub espacio de \mathbb{F}_q^n .

Surge entonces el problema de encontrar la menor cota en la entropía de Z . Aquí es donde es necesaria la CKCF.

La conexión entre esta cuestión y la CKCF puede ser demostrada mediante el siguiente caso especial. Supongamos que se intenta "unir" dos variables aleatorias X e Y en \mathbb{F}_q^n de manera que la salida sea la combinación lineal

$$Z = aX + bY,$$

donde a y b son elegidos uniforme e independientemente en \mathbb{F}_q . Puesto que esta computación es simétrica podemos asumir que X es uniforme. Podemos asumir también que $Y = f(X)$ para alguna función $f: \mathbb{F}_q^n \rightarrow \mathbb{F}_q^n$ (se puede fijar cualquier aleatoriedad adicional en Y). Vemos ahora que para cada $b \in \mathbb{F}_q$ fijo, el soporte de la variable aleatoria Z está contenido en un conjunto de Kakeya $K_b \subset \mathbb{F}_q^n$. Así vemos que, si existe un pequeño conjunto de Kakeya, entonces podríamos elegir la función f tal que Z tendrá un pequeño soporte y así también una pequeña *min-entropía*. Se demuestra que Z tiene *entropía rate* (la proporción entre la entropía y cardinal) de al menos $\frac{1}{2}$. Esto corresponde a la cota trivial de $q^{\frac{n}{2}}$ en el tamaño de los conjuntos de Kakeya. Por consiguiente, la CKCF da una menor cota de ≈ 1 en la *entropía rate* de Z .

APÉNDICE

Los siguientes programas han sido elaborados en el software científico *Mathematica 6.0* con el fin de ilustrar algunos conceptos expuestos en esta investigación.

1. MÉTODO DE DUALIDAD

1.1 Notación

El comando Dualidad transforma puntos en rectas. El plano de los puntos está a la izquierda y el de rectas a la derecha. Los símbolos utilizados en el comando son los siguientes:

- F es la lista de puntos
- $\{tmin, tmax\}$ son los valores máximo y mínimo de t en la ecuación paramétrica $\vec{a} + t\vec{b}$.
- $tipo$ es un parámetro de valores 0 y 1.
 $tipo = 0$, transforma el punto (a, b) en la recta $\{t, a + t b\}$
 $tipo = 1$, transforma el punto (a, b) en la recta $\{t, b + t a\}$
- tam es el tamaño de los puntos graficados

- *ventana1* y *ventana2* son los tamaños de las ventanas de visualización de la ventana de puntos y de rectas respectivamente.

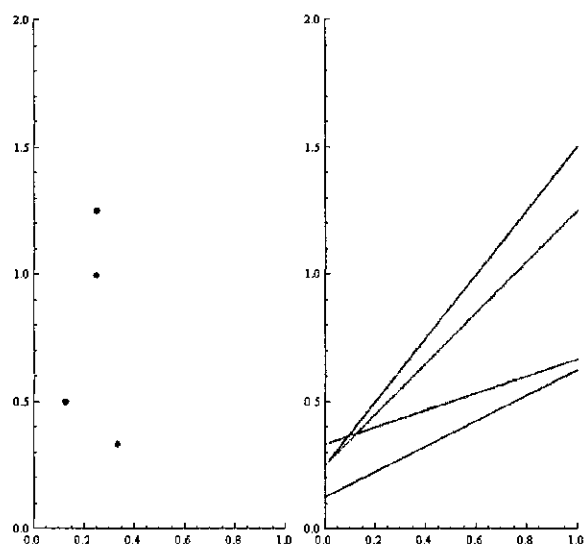
1.2 Código

```
Dualidad[F_List, {tmin_, tmax_}, tipo_Integer?(0 ≤ #1 ≤ 1 &),
  tam_?(#1 > 0 &), ventana1_List?(Length[#1] == 2 &),
  ventana2_List?(Length[#1] == 2 &), Opts___] :=
Module[{n = Length[F], t, lines1, puntos1},
  CreateLine[{x1_, y1_}, {tmin_, tmax_}] :=
  If[tipo == 0, Line[{{tmin, x1 + tmin * y1}, {tmax, x1 + tmax * y1}},
    Line[{{tmin, y1 + tmin * x1}, {tmax, y1 + tmax * x1}}]];
  lines1 =
  Graphics[Table[{Hue[i/n], CreateLine[F[[i]], {tmin, tmax}]},
    {i, 1, n}]];
  puntos1 =
  Graphics[Flatten[Table[{Hue[i/n], PointSize → tam, Point[F[[i]]]},
    {i, 1, n}]]];
  Grid[
    {{Show[puntos1, Axes → True, AxesOrigin → {0, 0},
      PlotRange → ventana1, Opts],
      Show[lines1, Axes → True, AxesOrigin → {0, 0},
      PlotRange → ventana2, Opts]}}]
]
```

1.3 Ejemplo

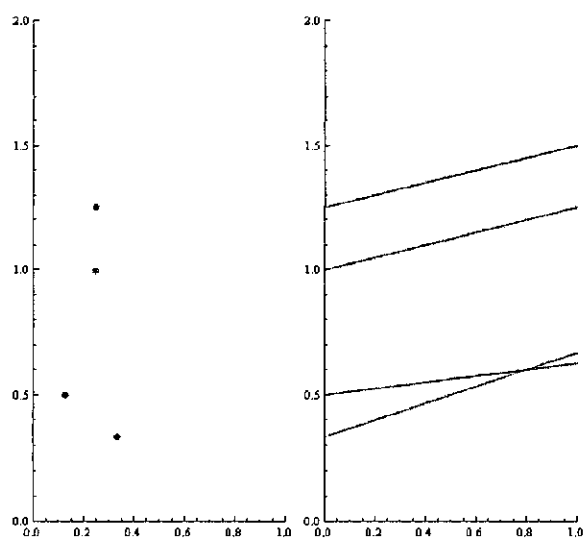
- El siguiente ejemplo muestra el método de dualidad con *tipo* = 0

```
Dualidad[{{1/4, 1}, {1/3, 1/3}, {1/4, 5/4}, {1/8, 1/2}}, {0, 1},
  0, 0.025, {{0, 1}, {0, 2}}, {{0, 1}, {0, 1}}, ImageSize → Medium]
```

Fig. A.1 Método de Dualidad con $tipo = 0$

- El siguiente ejemplo muestra la misma lista anterior pero con $tipo = 1$

Dualidad[{{1/4, 1}, {1/3, 1/3}, {1/4, 5/4}, {1/8, 1/2}}, {0, 1}, 1, 0.025, {{0, 1}, {0, 2}}, {{0, 1}, {0, 2}}, ImageSize → Medium]

Fig. A.2 Método de Dualidad con $tipo = 1$

1.4 Método de dualidad: Interactividad

Con el siguiente programa, haciendo clic en la ventana izquierda, se genera su recta en la ventana derecha

```
Dual1[points_, {tmin_, tmax_}, tipo_] := Module[{puntos},
  puntos = Partition[Flatten[points], 2];
  If[tipo == 0,
    Table[Line[{{tmin, puntos[[i, 1]] + tmin * puntos[[i, 2]]},
      {tmax, puntos[[i, 1]] + tmax * puntos[[i, 2]]}},
      {i, 1, Length[puntos]}],
    Table[Line[{{tmin, puntos[[i, 2]] + tmin * puntos[[i, 1]]},
      {tmax, puntos[[i, 2]] + tmax * puntos[[i, 1]]}},
      {i, 1, Length[puntos]}]
  ]
]
ventana1 = {{0, 1}, {0, 1}}; ventana2 = {{0, 1}, {0, 1.5}};

DynamicModule[{p = {}, l = {}},
  EventHandler[
    {Dynamic@Graphics[{Hue[0.], Point[p]}, PlotRange → ventana1,
      Frame → True, ImageSize → Medium],
    Dynamic@Graphics[{Hue[0.], l}, PlotRange → ventana2, Frame → True,
      ImageSize → Medium]},
    "MouseDown" => {AppendTo[p, MousePosition["Graphics"]];
      If[Length[p] ≥ 1, l = Dual1[p, {0, 1}, 0]]}]
]
```

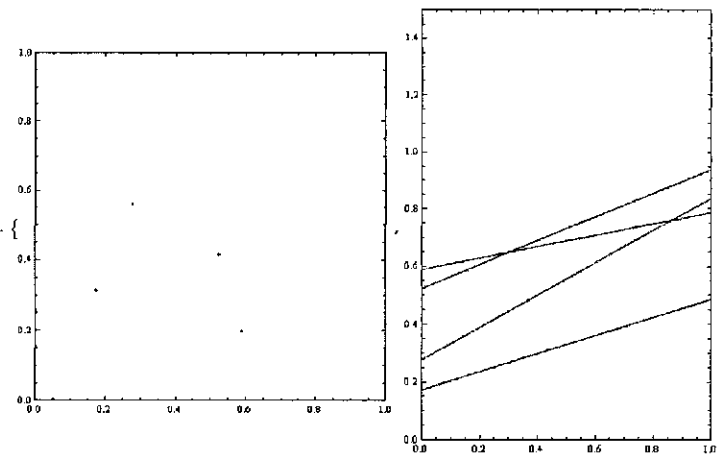


Fig. A.3 Interactividad del Método de Dualidad

2. CANTOR DUST

2.1 Notación

CantorDust grafica, a partir de dos puntos, el conjunto 2 - dimensional de Cantor contenido en un cuadrado que tiene a estos puntos iniciales como dos de sus vértices.

- **orto** tiene como entrada un vector y devuelve su vector ortogonal girado 90° en sentido horario. Equivale a aplicar tres veces la transformación compleja
- **cuadrado** es un programa que toma dos vectores \vec{a} y \vec{b} y forma el cuadrado $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}_b, \vec{c}_a\}$, donde $\vec{c} = \text{orto}[\vec{b} - \vec{a}]$.
- **Particion2** toma una lista de longitud múltiplo de 4 y la divide en cuadrados siguiendo la construcción del conjunto de Cantor.
- **step**[*i*] es la *i*-ésima etapa de la construcción del conjunto de Cantor

2.2 Código

```
CantorDust[u_List?(Length[#] == 2 &), v_List?(Length[#] == 2 &),
  k_Integer?(# >= 2 &), Opts___] :=
Module[{orto, vec, v2, v3, n},
  orto[w_List] := {Last[w], -First[w]};
  cuadrado[u1_List, v1_List] :=
    List[u1, v1, v1 + orto[v1 - u1], u1 + orto[v1 - u1]];
  Particion2[y_List, z_List] := (vec = z - y;
    v2 = y + vec / 4; v3 = y + 3 / 4 vec;
    List[cuadrado[y, v2], cuadrado[v3, z],
      cuadrado[z + orto[vec], v3 + orto[vec]],
      cuadrado[v2 + orto[vec], y + orto[vec]]]);
  cantorstep[a_List] := (n = Length[a];
    Flatten[Table[Particion2[a[[i, 1]], a[[i, 2]]], {i, 1, n}], 1]
  );
```

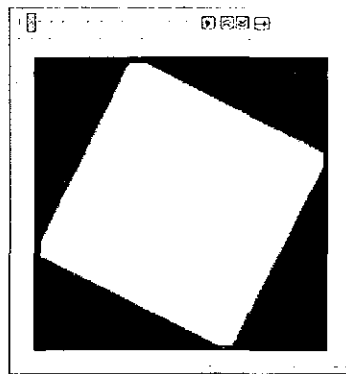
```

step[0] = cuadrado[u, v];
step[1] = Particion2[u, v];
For[i = 2, i ≤ k, i++, step[i] = cantorstep[step[i - 1]]];
Animate[Graphics[{Opts, Polygon[step[i]]}], {i, 0, k, 1},
  AnimationRepetitions → 1]
]

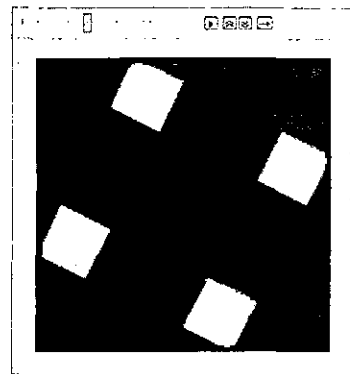
```

2.3 Ejemplo

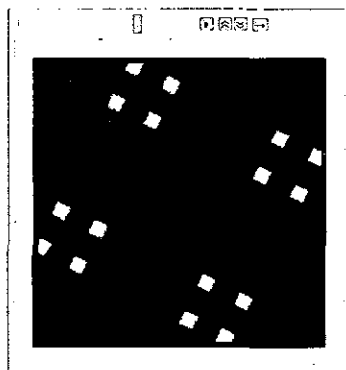
```
CantorDust[{0, 1/3}, {1/3, 1}, 3, Hue[0.], Background → Black]
```



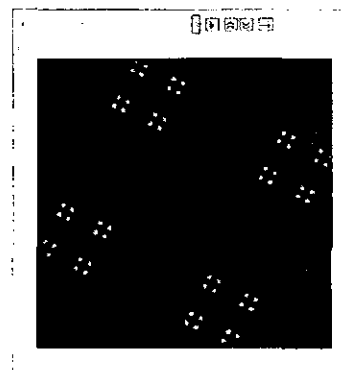
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. A.4 Tres primeras etapas de la construcción del Cantor Dust

3. CONJUNTO DE BESICOVITCH

3.1 Notación

BesicovitchDual toma como entrada dos vectores, construye el Cantor Dust y devuelve el conjunto de líneas de cada etapa de esa construcción. La transformación la realiza utilizando el comando

Dualidad

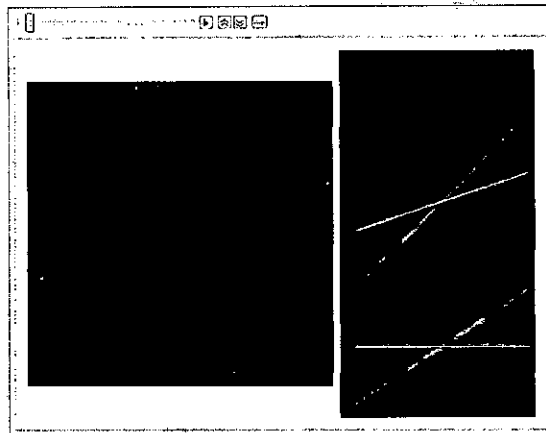
- *u* y *v* son los vectores de entrada.
- *k* es el número de pasos en la construcción del conjunto de Cantor.
- *tam* es el tamaño de los puntos graficados.

3.2 Código

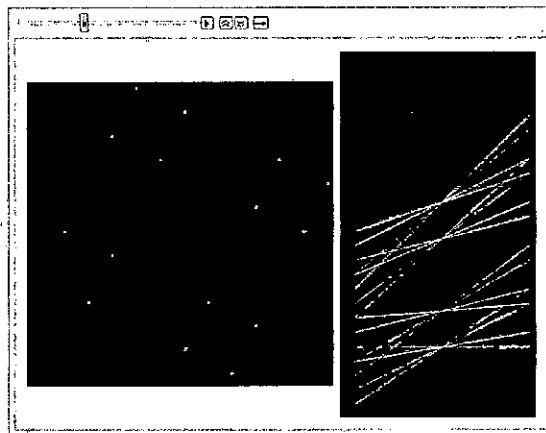
```
BesicovitchDual[u_List?(Length[#] == 2 &), v_List?(Length[#] == 2 &),
  k_Integer?(# >= 2 &), tam_?(#1 > 0 &),
  ventana1_List?(Length[#1] == 2 &), ventana2_List?(Length[#1] == 2 &),
  Opts___] := Module[{},
  CantorDust[u, v, k, Opts];
  Animate[
    If[i == 0, Dualidad[step[0], {0, 1}, 1, tam, ventana1,
      ventana2, ImageSize -> Medium, Background -> Black],
    Dualidad[Flatten[step[i], 1], {0, 1}, 1, tam, ventana1,
      ventana2, Background -> Black]], {i, 0, k, 1},
  AnimationRepetitions -> 1]
]
```

3.3 Ejemplo

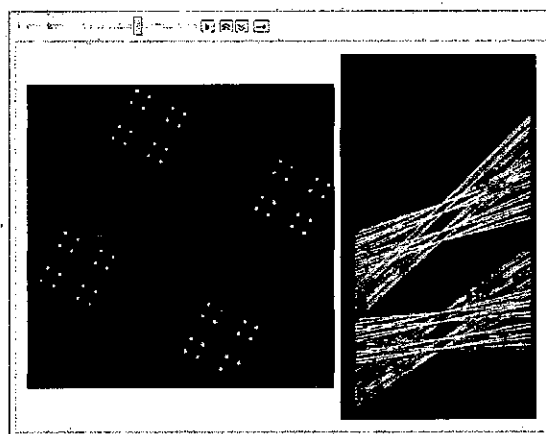
```
BesicovitchDual[{0, 1/3}, {1/3, 1}, 3, 0.01, {{0, 1}, {0, 1}},
  {{0, 1}, {0, 2}}, Hue[0.]]
```



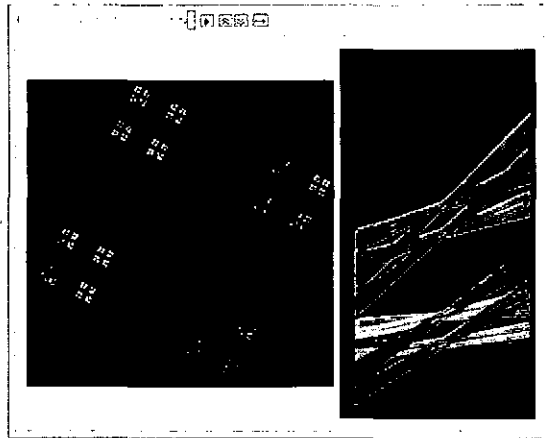
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. A.5 Generación de un conjunto de Besicovitch usando el Cantor Dust

3.4 Construcción de conjuntos de Besicovitch usando el Cantor

Dust: Interactividad

```

ventana1 = {{0, 1}, {0, 1}};
ventana2 = {{0, 1}, {0, 2}};

Manipulate[CantorDust[{0, 1/3}, {1/3, 1}, k];
DynamicModule[{p = {}, l = {}},
EventHandler[
{Dynamic@Show[Graphics[{Hue[0.6], Polygon[step[k]]}],
Graphics[{Hue[0.], Point[p]}], PlotRange -> ventana1,
Frame -> True, ImageSize -> Medium],
Dynamic@Graphics[{Hue[0.], l}, PlotRange -> ventana2,
Frame -> True, ImageSize -> Medium]},
"MouseDown" -> {AppendTo[p, MousePosition["Graphics"]];
If[Length[p] >= 1, l = Dual1[p, {0, 1}, 1]]}]
, Style["Etapas en la construcción del conjunto de Cantor",
12, Bold], {{k, 0, "Stage" }, 0, 4, 1}]

```

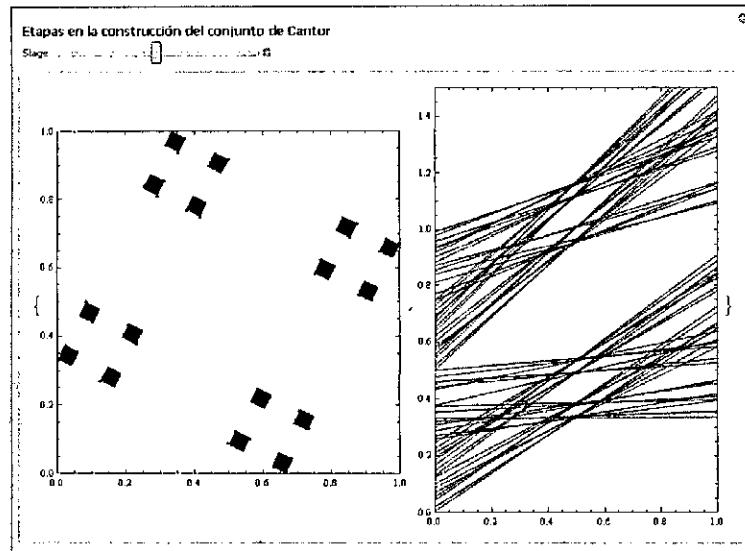



Fig. A.6 Interacción de la construcción de un conjunto de Besicovitch utilizando el Cantor Dust

4. CASO GENERAL DEL LEMA 2.3

4.1 Notación

El siguiente programa permite variar los parámetros del lema 2.3.

- a, b y c son los vértices del triángulo Δabc . Los vértices se toman en ese orden. La base es \overline{ac} .
- r es la razón de división del segmento \overline{ac} mediante el punto $M \in \overline{ac}$

4.2 Código

```
Unit[a_List] := a / Norm[a];

Lema1[a_List?(Length[#1] == 2 &), b_List?(Length[#1] == 2 &),
  c_List?(Length[#1] == 2 &), r_?(#1 != -1 &), d_?(#1 >= 0 &)] :=
Module[{v, M, tri0, tri1, tri2},
  If[d < Norm[a - c],
    v = d * Unit[c - a];
    M = (a + r * c) / (1 + r);
```

```

tri0 = Graphics[{Opacity[0.6], Black, Polygon[{a, b, c}]}];
tri1 = Graphics[{Opacity[0.3], Hue[0.], Polygon[{a, b, M}]}];
tri2 = Graphics[{Opacity[0.4], Hue[0.1],
  Translate[Polygon[{M, b, c}], -v]}];
Show[tri0, tri1, tri2, Background -> LightBlue]
, Print["El triángulo debe estar en el plano"]
]
]

```



4.3 Ejemplo

```
Lema1[{0, 0}, {2, 8}, {4, 0}, 1/2, 0.5]
```

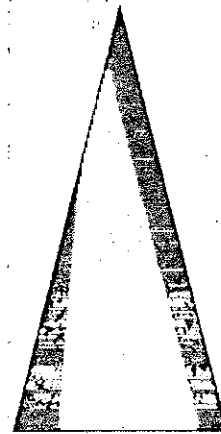


Fig. A.7 Ilustración del Lema 2.3

5. ÁRBOLES DE PERRON

5.1 Notación

En el siguiente código, a , b y c son los vértices del triángulo Δabc , los vértices en ese orden. La base es \overline{ac} .

- d es la distancia que un triángulo traslapa al inmediato anterior (En la teoría, $d = 2(1 - \alpha)$);

- k es el número de pasos de la construcción;
- dis es la distancia, igual en cada caso, entre cada uno de los 2^k segmentos en los que se divide \overline{ac} ;
- u es el vector unitario que va de a hacia c ;
- v es el vector de traslación;
- $step[-2]$ y $step[-1]$ representa al triángulo original y primera partición del mismo en 2^k triángulos, respectivamente;
- $step[i]$, $i \geq 0$, representa a las traslaciones en cada paso de la construcción.

5.2 Código

```
Unit[a_List] := a / Norm[a]

Perron[a_List? (Length[#1] == 2 &), b_List? (Length[#1] == 2 &),
  c_List? (Length[#1] == 2 &), d_? (#1 > 0 &), k_Integer? (#1 > 1 &), Opts___] :=
Module[{u, v, dis, pts, i, j, step, S, f},
  dis = Norm[c - a] / Power[2, k];
  If[d < dis,
    u = Unit[c - a];
    v = d * u;

    For[i = 0, i ≤ Power[2, k], i++, pts[i] = a + i * dis * u];
    step[-2] = {Opacity[0.5], Hue[0.5], Polygon[{a, b, c}]}];
    For[i = 1, i ≤ Power[2, k] - 1, i += 2,
      S[-1, i] = {Opacity[0.4], Hue[1/i],
        Polygon[{pts[i - 1], b, pts[i]}]}];
    For[i = 2, i ≤ Power[2, k], i += 2,
      S[-1, i] = {Opacity[0.3], Hue[1/(i - 1)],
        Polygon[{pts[i - 1], b, pts[i]}]}];
    step[-1] = Table[S[-1, i], {i, 1, Power[2, k]}];
```

```

For[i = 1, i ≤ Power[2, k] - 1, i += 2,
  S[0, i] = {Opacity[0.4], Hue[1/i], Polygon[{pts[i - 1], b, pts[i]}]};
For[i = 2, i ≤ Power[2, k], i += 2,
  S[0, i] = {Opacity[0.3], Hue[1/(i - 1)]},
  Translate[Polygon[{pts[i - 1], b, pts[i]}], -v]};
step[0] = Table[S[0, i], {i, 1, Power[2, k]}];

For[j = 1, j ≤ k - 1, j++,
  f[j] = Partition[step[j - 1], 2];
For[i = 1, i ≤ Power[2, k] / Power[2, j] - 1, i += 2, S[j, i] = f[j][[i]]];
For[i = 2, i ≤ Power[2, k] / Power[2, j], i += 2,
  S[j, i] = Translate[f[j][[i]], -2^j * d * u];
step[j] = Table[S[j, i], {i, 1, Power[2, k] / Power[2, j]}];

];
Animate[Show[Graphics[step[-2]], Graphics[step[j]],
  Background → Black], {{j, -2, "Stage"}, -2, k - 1, 1},
  AnimationRepetitions → 1]
, Print["Escoja un desplazamiento menor que ", dis // N]]
]

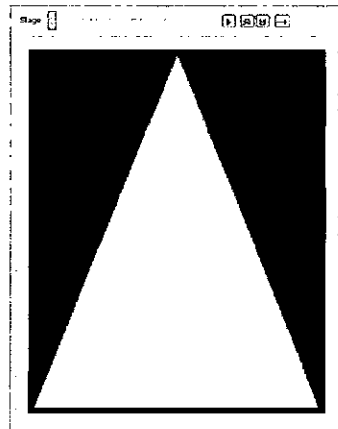
```

5.3 Ejemplo

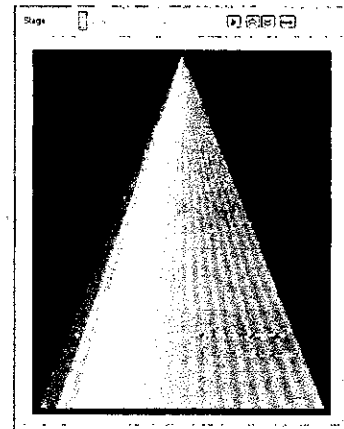
```

a = {0, 0}; b = {2, 5}; c = {4, 0}; d = 0.05; k = 5;
Perron[a, b, c, d, k]

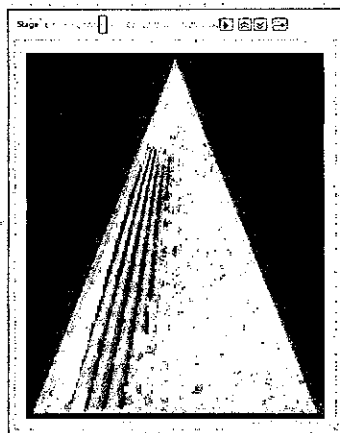
```



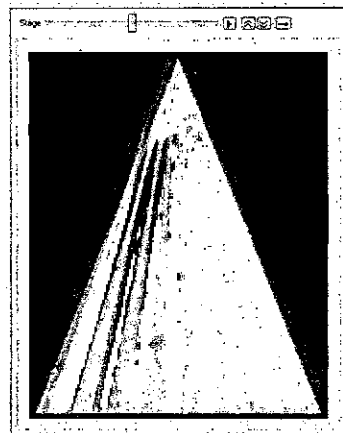
(a)



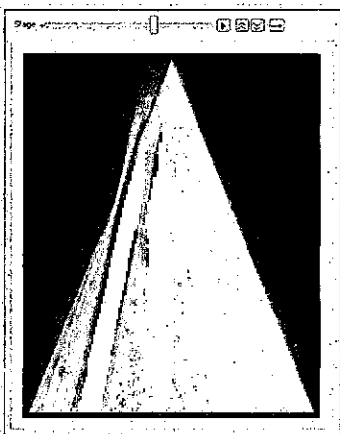
(b)



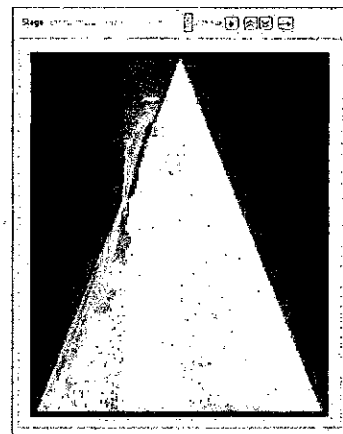
(c)



(d)

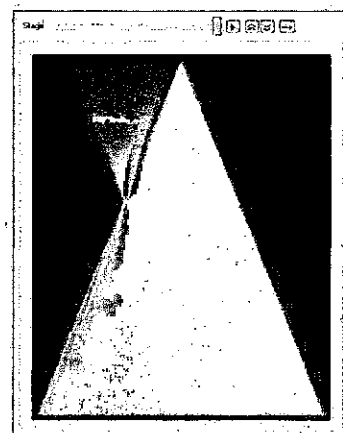


(e)



(f)

Fig. A.8 Construcción de un árbol de Perron



(g)

6. CONSTRUCCIÓN DE CONJUNTOS DE BESICOVITCH USANDO ÁRBOLES DE PERRON

6.1 Notación

La notación es la misma que la de los árboles de Perron. **Angle** es el ángulo entre \overline{AB} y \overline{AC} . De preferencia, el triángulo debe ser equilátero o isósceles. De lo contrario, el gráfico será aproximado

6.2 Código

```
Unit[a_List] := a / Norm[a]

Besicovitch[a_List? (Length[#1] == 2 &), b_List? (Length[#1] == 2 &),
  c_List? (Length[#1] == 2 &), d_? (#1 > 0 &), k_Integer? (#1 > 1 &), Opts___] :=
Module[{u, v, dis, pts, p1, p2, vec1, angle, i, S, f, j, step},
  dis = Norm[c - a] / Power[2, k];
  If[d < dis,
    u = Unit[c - a];
    v = d * u;
    angle = ArcCos[Divide[(b - a) . (c - a), Norm[b - a] * Norm[c - a]]];
    For[i = 0, i ≤ Power[2, k], i++, pts[i] = a + i * dis * u];
    step[-2] = {Opacity[0.5], Hue[0.5], Polygon[{a, b, c}]}];
    For[i = 1, i ≤ Power[2, k] - 1, i += 2,
      S[-1, i] = {Opacity[0.4], Hue[1/i], Polygon[{pts[i - 1], b, pts[i]}]}];
    For[i = 2, i ≤ Power[2, k], i += 2,
      S[-1, i] = {Opacity[0.3], Hue[1/(i - 1)],
        Polygon[{pts[i - 1], b, pts[i]}]}];
    step[-1] = Table[S[-1, i], {i, 1, Power[2, k]}];

    For[i = 1, i ≤ Power[2, k] - 1, i += 2,
      S[0, i] = {Opacity[0.4], Hue[1/i], Polygon[{pts[i - 1], b, pts[i]}]}];
    For[i = 2, i ≤ Power[2, k], i += 2,
      S[0, i] = {Opacity[0.3], Hue[1/(i - 1)],
        Translate[Polygon[{pts[i - 1], b, pts[i]}], -v]}];
    step[0] = Table[S[0, i], {i, 1, Power[2, k]}];

    For[j = 1, j ≤ k - 1, j++,
      f[j] = Partition[step[j - 1], 2];
      For[i = 1, i ≤ Power[2, k] / Power[2, j] - 1, i += 2, S[j, i] = f[j][[i]]];
```

```

For[i = 2, i ≤ Power[2, k] / Power[2, j], i += 2,
  S[j, i] = Translate[f[j][[i]], -2^j * d * u];
step[j] = Table[S[j, i], {i, 1, Power[2, k] / Power[2, j]}];

];
p1 = step[k - 1];
vec1 = (c - a - d * u * Sum[Power[2, j], {j, 0, k - 1}]) / 2;
p2 = Table[Rotate[p1, i * 2 * angle, vec1],
  {i, 0, Floor[2 * π / (2 * angle)]}];
Graphics[p2, Opts]
, Print["Escoja un desplazamiento menor que ", dis // N]]
1

```

6.3 Ejemplo

```

a = {0, 0}; b = {1, 1}; c = {2, 0}; d = 0.06; k = 5;
Besicovitch[a, b, c, d, k, Background → Black]

```

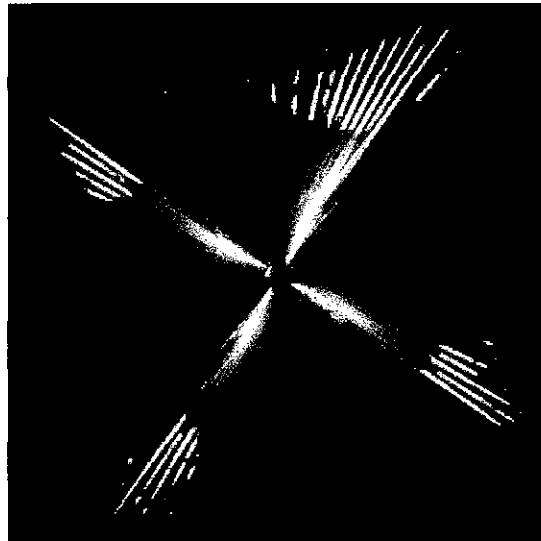


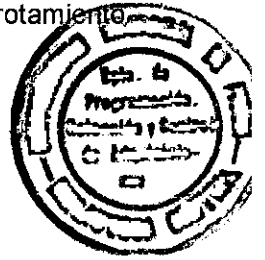
Fig. A.8 Conjunto de Besicovitch construido usando árboles de Perron

7. BROTAMIENTO

7.1 Notación

Las notaciones empleadas en el comando **Brotamiento1** son las siguientes:

- **u** es la lista que contiene los tres vértices del triángulo. El orden en el que el programa toma los vértices es $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ y realiza el brotamiento tomando como base la línea que contiene al segmento \overline{ac} .
- **r** es la razón $\frac{\sigma_0}{\sigma_1}$ (ver cap.2, fig. 2.19).
- **M** es el punto que divide al segmento \overline{ac} en la razón **r**.
- **dis** es la distancia medida desde el vértice \vec{b} , en la dirección de \overline{ac}^\perp , a la línea brote.
- **M1** son las coordenadas del vector $Proy_{\overline{ac}} \overline{ab}$ aplicado en el punto \vec{a} .
- **u1** es $\vec{u}_{J[\overline{ac}]}$, donde **J** es la transformación compleja.



Por consiguiente, el comando **Brotamiento1** toma de entrada tres vértices y da como salida los vértices de los triángulos que son el resultado de brotar una vez el triángulo original.

7.2 Código

```

Brotamiento1[u_List?(Length[#1] == 3 &), r_?(#1 != -1 &), dis_?(#1 > 0 &)] :=
Module[{a = u[[1]], b = u[[2]], c = u[[3]], u1, M, M1, paso, v},
If[{Length[a], Length[b], Length[c]} == {2, 2, 2},
J[{x1_, y1_}] := {-y1, x1};
M = Divide[a + r * c, 1 + r];
M1 = a + Divide[(b - a) . (c - a), (c - a) . (c - a)] * (c - a);
u1 = Divide[J[c - a], Norm[c - a]];
If[(b - M1) . u1 > 0, u1 = u1, u1 = -u1];
paso = M1 + ((b - a) . u1 + dis) u1;

```



```
v[1] = c + Divide[(a - c). (J[paso] - J[c]), (a - c).J[b - c]] + (b - c);  
v[0] = a + Divide[(c - a). (J[paso] - J[a]), (c - a).J[b - a]] + (b - a);  
{c, v[1], M}, {a, v[0], M}},  
]
```

7.3 Ejemplo

```
Brotamiento1[{{0, 0}, {2, 1}, {0, 2}}, 1, 3];  
Graphics[Polygon[%]]
```

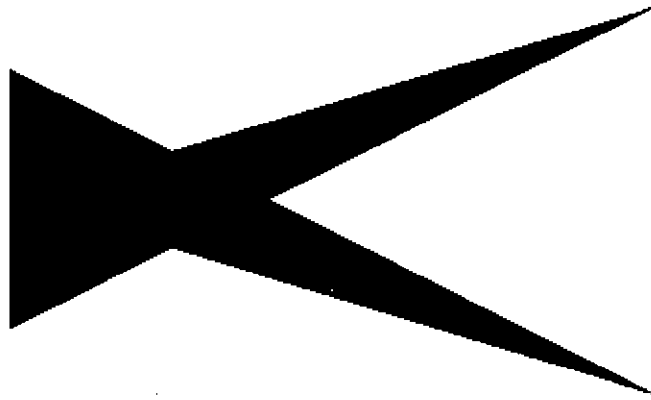


Fig. A.9 Brotamiento de un triángulo

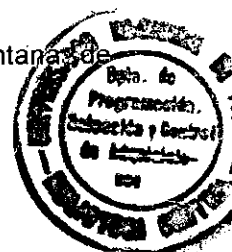
7.4 Brotamiento repetido

7.4.1 Notación

Las notaciones empleadas son:

- $u = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ son las coordenadas del triángulo base. El árbol brota en líneas paralelas a \overline{ac} .
- p es el número de veces que se repite "Brotamiento1".
Corresponde al número de líneas de brote.
- d es la distancia medida desde \vec{b} , en la dirección de \overline{ac}^\perp , hasta la última línea de brote.

- **distancias** es una partición de $\langle 0, d \rangle$ en p partes no necesariamente iguales.
- **divisiones** es la lista que contiene a las razones de división de las bases de los triángulos en cada brote.
- **ejex** y **eje** son las coordenadas de la ventana de visualización



7.4.2 Código

```
Options[brotar] = {distancias → Automatic, divisiones → Automatic,
  ejex → Automatic, eje → Automatic};

brotar[u_List?(Length[#1] == 3 &), p_?(#1 ≥ 1 &), d_?(#1 > 0 &),
  Ops__Rule] :=
Module[{a = u[[1]], b = u[[2]], c = u[[3]], dist, div, tri, u1, M1,
  var1, var2, xvar, yvar},
  J[{x1_, y1_}] := {-y1, x1};
  M1 = a + Divide[(b - a).(c - a), (c - a).(c - a)]*(c - a);
  u1 = Divide[J[c - a], Norm[c - a]];
  If[(b - M1).u1 > 0, u1 = u1, u1 = -u1];
  {dist} = {distancias} /. Flatten[{Ops}] /. Options[brotar] /.
    Automatic → Table[d/p, {i, 1, p}];
  {div} = {divisiones} /. Flatten[{Ops}] /. Options[brotar] /.
    Automatic → Array[1 &, p];
  tri = {u};
  brote[0] = tri;
  For[i = 1, i ≤ p, i++,
    brote[i] =
      Partition[Flatten[Table[Brotamiento1[tri[[j]], div[[i]], dist[[i]]],
        {j, 1, Length[tri]}], 2], 3];
    tri = brote[i]
  ];
  var1 = {a[[1]], c[[1]], (b + d*u1)[[1]]};
  var2 = {a[[2]], c[[2]], (b + d*u1)[[2]]};
  {xvar} = {ejex} /. Flatten[{Ops}] /. Options[brotar] /.
    Automatic → {Min@@var1, Max@@var1};
```

```

{yvar} = {ejey} /. Flatten[{Ops}] /. Options[brotar] /.
Automatic -> {Min@@var2, Max@@var2};
Animate[Graphics[Table[{Hue[1/(i+1)], Polygon[brote[j][[i]]]},
{i, 1, 2^j}], PlotRange -> {xvar, yvar}, Background -> Black],
{j, 0, p, 1}, AnimationRepetitions -> 1]
]

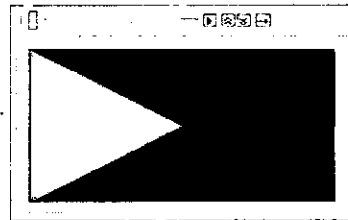
```

7.4.3 Ejemplo

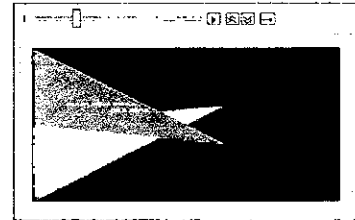
```

Options[brotar] = {distancias -> Automatic, divisiones -> Automatic,
ejex -> Automatic, ejey -> Automatic};
brotar[{{0, 2}, {2, 1}, {0, 0}}, 4, 2]

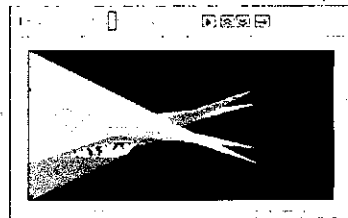
```



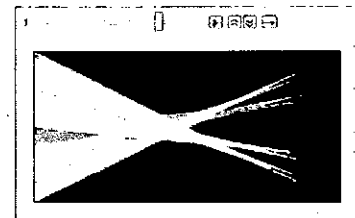
(a)



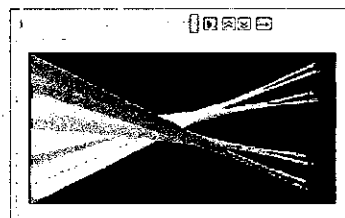
(b)



(c)



(d)



(e)

Fig. A.10 T_4 : Brotamiento repetido de un triángulo T

8. CONSTRUCCIÓN DE CONJUNTOS DE BESICOVITCH USANDO ÁRBOLES DE CUNNINGHAM

8.1 Construcción de $K^{(0)}$

8.1.1 Notación

Los siguientes comandos devuelven los puntos necesarios para graficar el conjunto $K^{(0)}$ y mover la aguja sobre él

- *vertices* devuelve las coordenadas de los vértices del núcleo poligonal Π .
- *solu* da los valores de t que corresponden a dos puntos del segmento $(1-t)q1 + t * q2$ que descansan sobre una circunferencia centrada en el origen y de radio *rad*.
- *seg1* devuelve las coordenadas paramétricas de un punto del segmento $(1-t)pun1 + t * pun2$.
- *ptsc* devuelve los vértices de Π adecuadamente indexados
- *ptsAB* son los correspondientes puntos A y B
- *ptsDsEs* devuelve los puntos hasta donde debe trasladarse la aguja para luego rotar.
- *Cu* devuelve n conjuntos $K^{(0)}$ compuestos de n triángulos y con área de Π menor que ϵ

8.1.2 Código

```
vertices[n1_Integer? (#1 > 1 &), radio_? (#1 > 0 &),  $\alpha$ _? (0 <= #1 <=  $\pi$  &)] :=  
  Table[{radio * Cos[i *  $\alpha$ ], radio * Sin[i *  $\alpha$ ]}, {i, 0, n1}];  
solu[q1_List? (Length[#1] == 2 &), q2_List? (Length[#1] == 2 &),  
  rad_? (#1 > 0 &)] :=  
  Quiet[Solve[Norm[(1 - t) * q1 + t * q2] == rad, t] // Simplify];  
seg1[t_, punt1_List, punt2_List] := (1 - t) * punt1 + t * punt2;
```

```

ptsc[nl_Integer? (#1 ≥ 3 &), u_List] := Module[{s, i, c},
  For[i = 1, i ≤ (nl - 1) / 2, i++, c[2 * i - 1] = u[[i]]];
  (*Esto asigna los vértices impares de  $\Pi$ *)
  s = 0; For[i = (nl + 1) / 2, i ≤ nl, i++, s = s + 1; c[2 * (s - 1)] = u[[i]]];
  (*Esto asigna los vértices pares de  $\Pi$ *)
  c[nl] = c[0]; c[nl + 1] = c[1];
  Table[c[i], {i, 0, nl + 1}]
];

```

```

ptsAB[n_Integer? (#1 ≥ 3 &), radi_? (#1 ≥ 0 &), u_List] :=
Module[{A, B, q, cc, ts, c, i},
  cc = ptsc[n, u];
  For[i = 0, i ≤ n + 1, i++, c[i] = cc[[i + 1]]];
  ts = t /. solu[c[0], c[1], radi];
  For[q = 1, q ≤ n - 1, q++,
    A[q] = seg1[ts[[2]], c[q - 1], c[q]];
    B[q] = seg1[ts[[1]], c[q], c[q + 1]];
  A[0] = seg1[ts[[2]], c[n - 1], c[n]];
  B[0] = seg1[ts[[1]], c[0], c[1]];
  {Table[A[i], {i, 0, n - 1}], Table[B[i], {i, 0, n - 1}]}
];

```

```

ptsDsEs[n_Integer? (#1 ≥ 3 &), r1_? (#1 > 0 &), u_List] :=
Module[{ins, cc, c, Ds, Es, i},
  cc = ptsc[n, u];
  For[i = 0, i ≤ n + 1, i++, c[i] = cc[[i + 1]]];
  ins = t /. Quiet[solu[c[0], c[1], r1 * Cos[ $\pi$  / n]]];
  For[i = 1, i ≤ n - 1, i++, Ds[i] = seg1[ins[[1]], c[i], c[i + 1]]];
  Ds[0] = seg1[ins[[1]], c[n], c[n + 1]];
  Ds[n] = Ds[0];
  Ds[n + 1] = Ds[1];
  For[i = 1, i ≤ n, i++,
    Es[i] = c[i] + ins[[2]] * (c[i + 1] - c[i]) +
      (c[i] - c[i + 1]) / Norm[c[i] - c[i + 1]];
  Es[n + 1] = Es[1];
  {Table[Ds[i], {i, 0, n + 1}], Table[Es[i], {i, 0, n + 1}]}
];

```

```

Cu[n_Integer? (#1 ≥ 3 && OddQ[#1] &),  $\epsilon$ _? (#1 > 0 &)] :=
Module[{radinsct,  $\alpha$ 1, ver, c, A, B, cc, ab, i},
  radinsct = Sqrt[ $\epsilon$  / (2 *  $\pi$ )];  $\alpha$ 1 = 2 *  $\pi$  / n;
  ver = vertices[n, radinsct,  $\alpha$ 1];

```

```

cc = ptsc[n, ver]; ab = ptsAB[n, 1, ver];
For[i = 0, i ≤ n + 1, i++, c[i] = cc[[i + 1]]];
For[i = 0, i ≤ n - 1, i++, A[i] = ab[[1, i + 1]]];
For[i = 0, i ≤ n - 1, i++, B[i] = ab[[2, i + 1]]];
Show[Graphics[{Hue[0.6], Polygon[ver]}],
Graphics[{Hue[0.6], Table[Polygon[{A[i], c[i], B[i]]},
{i, 0, n - 1}]}]]
]

```

8.1.3 Ejemplo

Cu[7, 0.25]

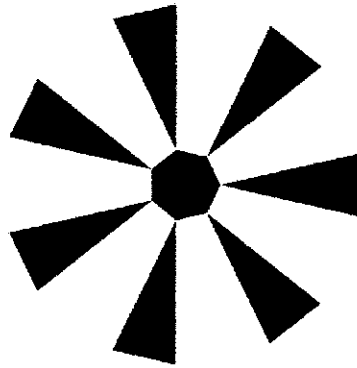


Fig. A.11 Primera aproximación de Cunningham

8.2 Movimiento de la aguja sobre $K^{(0)}$

8.2.1 Notación

- *needle* es la aguja que empieza en p_1 y está en la recta con vector direccional $p_2 - p_1$.
- En el comando *lista*, siguiendo la notación de la tesis, $n = Q$; m es el tiempo que la aguja demora en rotar y abandonar un triángulo, ϵ es el área de la circunferencia más pequeña e

interior y u es el vector de entrada para calcular los puntos $c[i]$, $A[i]$ y $B[i]$.

- **kakeya** permite visualizar el movimiento de la aguja sobre n triángulos en los que tarda m segundos en abandonar cada uno.

8.2.2 Código

```

needle[p1_List? (Length[#1] == 2 &), p2_List? (Length[#1] == 2 &)] :=
Module[{tt, punfinal},
  tt = {-1 / Norm[p2 - p1], 1 / Norm[p2 - p1]};
  punfinal = p1 + tt[[2]] * (p2 - p1);
  {Hue[0.], Line[{p1, punfinal}]}}

lista[n_, m_, t_,  $\epsilon$ _, u_List] :=
Module[{step1 = Null, radi, listini1, cc, de, c, Ds, Es, i},
  listini1 = Null;
  radi = Sqrt[ $\epsilon$  / (2 *  $\pi$ )];
  cc = ptsc[n, u]; de = ptsDsEs[n, radi, u];
  For[i = 0, i ≤ n + 1, i++, c[i] = cc[[i + 1]]];
  For[i = 0, i ≤ n + 1, i++, Ds[i] = de[[1, i + 1]]];
  For[i = 0, i ≤ n + 1, i++, Es[i] = de[[2, i + 1]]];
  For[i = 0, i ≤ n * m, i += m,
    step1 = Quiet[
      AppendTo[
        If[n * m - i ≤ t ≤ n * m - i + m,
          (If[n * m - i ≤ t ≤ (2 * n * m - 2 * i + m) / 2,
            Quiet[Rotate[Quiet[needle[Ds[(n * m - i) / m + 1 - 1], c[
              (n * m - i) / m + 1]], 2 * (t - n * m + i) *  $\pi$  / (n * m),
              c[(n * m - i) / m + 1]]]
            // Evaluate,
          (If[
            (2 * n * m - 2 * i + m) / 2 ≤ t ≤ n * m - i + m,
            Translate[
              Quiet[Rotate[Quiet[needle[Ds[(n * m - i) / m + 1 - 1],
                c[(n * m - i) / m + 1]],  $\pi$  / n, c[(n * m - i) / m + 1]]]

```

```

      (2 * t - 2 * n * m + 2 * i - m) / n *
      (Ds[(n * m - i) / m + 1] - Es[(n * m - i) / m + 1])]
      // Evaluate]) // Evaluate
    ]) // Evaluate
  ],
  listini1]
];
listini1 = step1
]; listini1
]

kakeya[n_, m_, ε_] := Module[{Γ, vert}, Γ = Graphics[Circle[]];
  vert = vertices[n, Sqrt[ε / (2 * π)], 2 * π / n];
  Manipulate[Show[Γ, Cu[n, ε],
    Graphics[lista[n, m, t, ε, vert] /. t -> i]], {i, 0, n * m}]

```

8.2.3 Ejemplo

```
kakeya[5, 3, 0.15]
```

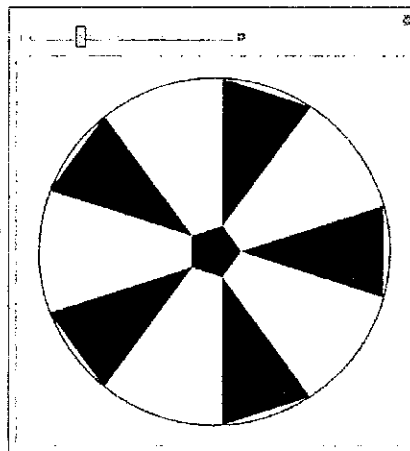


Fig. A.12 Movimiento de la aguja

8.3 Construcción de $K^{(1)}$

8.3.1 Notación

- **particion** divide el segmento \overline{ab} en 2^{kk+1} puntos, incluidos los extremos. Esto se consigue en i etapas, $0 \leq i \leq kk$, en cada una de las cuales, la distancia entre los puntos es de $\frac{\delta \|\overline{ab}\|}{2^i(\delta + tr)}$.
- **disline** devuelve la distancia del punto c_{ext} a la recta determinada por $\vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$.
- **prolong** prolonga el vector \overrightarrow{ab} hasta la recta paralela a vec y ubicada a una distancia, perpendicular, dis de \vec{b} .
- **ArbolK** devuelve las coordenadas de los vértices de $K^{(1)}$.
- **PrimerReemplazo** da como resultado la unión de los Q conjuntos $K^{(1)}$.

8.3.2 Código

```

particion[a_List, b_List, d_, r_, kk_] :=
Module[{normaab, unit, dis, listpts, unitario, i},
normaab = Sqrt[(b - a).(b - a)];
unit = Divide[b - a, normaab];
parte1[u_List, dis1_] :=
{unitario = Divide[u[[2]] - u[[1]], Norm[u[[2]] - u[[1]]];
{u[[1]], u[[1]] + dis1*unitario, u[[2]] - dis1*unitario, u[[2]]}};
listpts = {{a, b}};
For[i = 0, i ≤ kk, i++,
dis[i] = Divide[d*normaab, Power[2, i]*(d + i*r)]];
For[i = 1, i ≤ kk, i++,
listpts =
Partition[Flatten[Table[parte1[listpts[[j]], dis[i]],
{j, 1, Length[listpts]}], 1], 2];
];
Flatten[listpts, 1]
]

```

```

disline[a_List, b_List, cext_List] := Module[{vec, M1, u1},
  J[{x1_, y1_}] := {-y1, x1}; vec = b - a;
  M1 = a + Divide[(cext - a).(vec), (vec).(vec)]*(vec);
  u1 = Divide[J[vec], Norm[vec]];
  If[(cext - M1).u1 > 0, u1 = u1, u1 = -u1];
  (cext - a).u1
]

prolong[a_List, b_List, vec_List, dis_] := Module[{u1, M1, paso},
  J[{x1_, y1_}] := {-y1, x1};
  M1 = a + Divide[(b - a).(vec), (vec).(vec)]*(vec);
  u1 = Divide[J[vec], Norm[vec]];
  If[(b - M1).u1 > 0, u1 = u1, u1 = -u1];
  paso = M1 + (Abs[(b - a).u1] + dis) u1;
  a + Abs[Divide[(vec).(J[paso] - J[a]), (vec).J[b - a]]]*(b - a)
]

ArbolK[c0_List, c1_List, c2_List, A_List, B_List, p_] :=
Module[{d, r, v, ptsAB, ptc, A1, B1, i},
  d = Abs[disline[c0, c2, c1]]; r = Abs[disline[A, B, c1]];
  ptsAB = particion[A, B, d, r, p];
  For[i = 0, i ≤ Power[2, p + 1] - 1, i++, v[i] = ptsAB[[i + 1]]];
  For[i = 0, i ≤ Power[2, p + 1], i++,
    ptc[i] = c0 + i*(c2 - c0)/(Power[2, p + 1]);
  For[i = 1, i ≤ Power[2, p + 1] - 1, i++,
    A1[i] = prolong[v[i - 1], ptc[i], B - A, r];
  For[i = 1, i ≤ Power[2, p + 1] - 1, i++,
    B1[i] = prolong[v[i], ptc[i], B - A, r];
  Join[Table[{ptc[i], v[i], A1[i + 1], B1[i + 1], ptc[i + 1]],
    {i, 0, Power[2, p + 1] - 2}},
    {{ptc[Power[2, p + 1] - 1], v[Power[2, p + 1] - 1], ptc[Power[2, p + 1]]}}]
]

PrimerReemplazo[n_Integer?(#1 ≥ 3 && OddQ[#1] &), ε_?(#1 > 0 &),
  p_?(#1 ≥ 1 &)] := Module[{radinsct, α1, c, A, B, Ktree, ver, cc, ab, i},
  radinsct = Sqrt[ε/(2*π)]; α1 = 2*π/n;
  ver = vertices[n, radinsct, α1];
  cc = ptsc[n, ver]; ab = ptsAB[n, 1, ver];
  For[i = 0, i ≤ n + 1, i++, c[i] = cc[[i + 1]]];
  For[i = 0, i ≤ n - 1, i++, A[i] = ab[[1, i + 1]]]; A[n] = A[0];
  For[i = 0, i ≤ n - 1, i++, B[i] = ab[[2, i + 1]]]; B[n] = B[0];

```

```

For[i = 1, i ≤ n, i++,
  Ktree[i] = ArbolK[c[i - 1], c[i], c[i + 1], A[i], B[i], p]] // Evaluate;
di = disline[c[0], c[2], c[1]];
Table[Ktree[i], {i, 1, n}]
]

```

8.3.3 Ejemplo

```

a1 = {-0.17971728736584414`, 0.08654728415632948`};
c1 = {0.19947114020071635`, 0};
c2 = {-0.17971728736584414`, -0.08654728415632948`};
A11 = {0.9838439822527454`, -0.1790279826872314`};
B11 = {0.9838439822527454`, 0.1790279826872314`};
kv1 = ArbolK[a1, c1, c2, A11, B11, 5];

```

```

Show[Graphics[Table[{Hue[1/i], Polygon[kv1[[i]]}], {i, 1, Length[kv1]}],
  Background → Black, ImageSize → Medium]

```



Fig. A.13 $K^{(1)}$

```

Show[
  Graphics[Table[{Hue[0.6], Polygon[PrimerReemplazo[13, 0.025, 3][[ii]]}],
    {ii, 1, 13}], Background → Black]

```

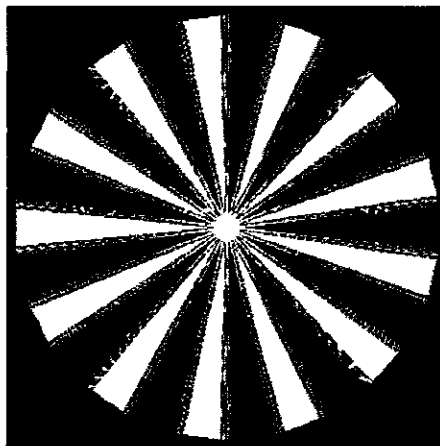


Fig. A.14 Primer reemplazo en la construcción de Cunningham

9. LEMA DE SCHWARTZ – ZIPPEL

9.1 Notación

El siguiente programa ilustra el lema de Schwartz – Zippel. g es un polinomio en \mathbb{Z}_5 .

9.2 Código

```
g = Mod[3 + 4 #2 + #2^2 + #1 + 2 #1 #2 + 4 #1^2, 5] &

Zippel[S_List] := Module[{lista, vec},
  lista = Table[RandomChoice[S, 2], {i, 1, 20}];
  vec = Map[g@@# &, lista, {1}];
  Count[vec, 0] / Length[lista] // N
]
```

9.3 Ejemplo

```
Zippel[{0, 2, 3, 4}]
```

```
0.2
```

Table[Zippel[{0, 2, 3, 4}], {i, 1, 100}]

```
{0.15, 0.2, 0.1, 0.3, 0.4, 0.15, 0.1, 0.25, 0.2, 0.1, 0.05, 0.3, 0.15,
0.15, 0.2, 0.25, 0.15, 0.15, 0.1, 0.15, 0.1, 0.15, 0.2, 0.3, 0.15,
0.2, 0.35, 0.25, 0.3, 0.05, 0.2, 0.2, 0.25, 0.1, 0.1, 0.25, 0.4, 0.1,
0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.15, 0.2, 0.1, 0.1, 0.05, 0.15, 0.2, 0.35, 0.2,
0.2, 0.2, 0.25, 0.15, 0.25, 0.2, 0.15, 0.2, 0.2, 0.25, 0.25, 0.1,
0.2, 0.05, 0.3, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.4, 0.1, 0.3, 0.15,
0.25, 0.1, 0.2, 0.15, 0.35, 0.35, 0.1, 0.3, 0.2, 0.3, 0.1, 0.15, 0.25,
0.15, 0.2, 0.2, 0.05, 0.1, 0.1, 0.15, 0.25, 0.2, 0.35, 0.2, 0.25}
```

Fig. A.15 Comprobación del lema de Schwartz - Zippel

10. DERIVADA DE HASSE

10.1 Notación

p es el polinomio y k es el orden.

10.2 Código

```
Hasse[p_, k_] := With[{n = Exponent[p, x]},
Sum[Binomial[j, k] * Coefficient[p, x, j] * Power[x, j - k],
{j, k, n}]]
```

10.3 Ejemplo

```
p := x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6;
Hasse[p, 1]
```

```
1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5
```

11. DERIVADA DE HASSE MÓDULO N

11.1 Notación

p es el polinomio, k es el orden y mod es el módulo.



11.2 Código

```
Hasse1[p_, k_, mod_] :=
  With[{n = Exponent[p, x]},
    Sum[Mod[Binomial[j, k] * Coefficient[p, x, j], mod] *
      Power[x, j - k], {j, k, n}]]
```

11.3 Ejemplo

```
Hasse1[p, 1, 3]
```

$$1 + 2x + x^3 + 2x^4$$

```
Hasse1[p, 1, 2]
```

$$1 + x^2 + x^4$$

12. PARTE HOMOGÉNEA

12.1 Notación

p es el polinomio, m es el grado de la parte homogénea.

12.2 Código

```
hom[p_, m_] :=
  Sum[If[Plus @@ Exponent[p[[i]], Variables[Expand[p]]] == m,
    p[[i]], 0], {i, Length[p]}]
```

12.3 Ejemplo

```
p := x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6; q := p /. x -> y;
```

```
r := p /. x -> z;
```

```
hom[Expand[p * q * r], 4]
```

$$x^2 y z + x y^2 z + x y z^2$$

CONCLUSIONES

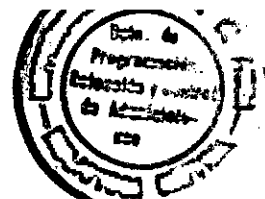
- Los conjuntos de Besicovitch son contraejemplos de las condiciones necesarias del teorema de Fubini, lo que implica que la integración en el plano es distinta de la integración iterada.
- Existen conjuntos de Besicovitch de área nula en \mathbb{R}^n .
- El conjunto de Cantor genera conjuntos de Besicovitch.
- Es posible construir un conjunto de Kakeya dentro de un círculo de radio 1.
- Los conjuntos de Kakeya en el plano tiene dimensión de Hausdorff y de Minkowsky igual a 2.
- Al discretizar un conjunto de Kakeya, se obtiene una relación entre el cardinal del conjunto producto y la dimensión del conjunto de Kakeya contenido en ese conjunto producto.
- Para $n \geq 3$, los conjuntos de Kakeya tienen dimensión de Minkowsky de por lo menos $4\frac{n-1}{7} + 1$.
- Al considerar polinomios con ceros de alta multiplicidad, se mejora la constante que aparece en la CKCF.
- El cardinal de los conjuntos de Kakeya en un campo finito es de por lo menos $\frac{1}{2^n} q^n$.

RECOMENDACIONES

- Estudiar otros métodos de construcción de conjuntos de Besicovitch, como por ejemplo el método de Korner.
- Estudiar la conjetura desde el punto de vista del operador maximal de Kakeya.
- Desarrollar los resultados parciales de la conjetura euclidiana para la dimensión de Hausdorff de conjuntos de Kakeya en espacios euclidianos de dimensión mayor que 2.
- Demostrar la versión maximal de la conjetura de Kakeya para $n = 2$.
- Estudiar el problema de Kakeya en superficies más generales, por ejemplo, sobre la esfera y el cilindro. Los segmentos de línea en este caso general serán, obviamente, segmentos de geodésicas.

BIBLIOGRAFÍA

- [Ba64] Bartle R. INTRODUCTION TO MEASURE THEORY, Wiley, (1964)
- [Bo99] J. Bourgain, ON THE DIMENSION OF KAKEYA SETS AND RELATED MAXIMAL INEQUALITIES, Geom. Funct. Analysis, págs. 256–282. (1999).
- [Cu71] Cunningham. F, THE KAKEYA PROBLEM FOR SIMPLY CONNECTED AND FOR STAR-SHAPED SETS, Amer. Math. Monthly, págs. 114–129 (1971).
- [Dv08] Dvir, Z. ON THE SIZE OF KAKEYA SETS IN FINITE FIELDS. (2008).
- [DKSS09] Dvir, Z. , Kopparty, S. , Saraf, S. y Sudan, M. EXTENSIONS TO THE METHOD OF MULTIPLICITIES WITH APPLICATIONS TO KAKEYA SET AND MERGERS. (2009)
- [Fa03] Falconer, K. FRACTAL GEOMETRY. MATHEMATICAL FOUNDATIONS AND APPLICATIONS. 2ed. Wiley, (2003)
- [Fr87] Frayley, J. ÁLGEBRA ABSTRACTA. Addison – Wesley Iberoamérica. (1987)
- [Fu08] Furter, M. The KAKEYA PROBLEM (2008)



- [GT09] Geil, O. y Thomsen, C. ON THE NUMBER OF ZEROS OF MULTIPLICITY r . (2009)
- [HR98] Hare, E y Rönning, O. APPLICATIONS OF GENERALIZED PERRON TREES TO MAXIMAL FUNCTIONS AND DENSITY BASES (1998)
- [Io04] Iosevich, A. INTRODUCTION TO THE BESICOVITCH/KAKEYA CONJECTURE: PART I (2004)
- [KT02] Katz, N.H y Tao, T. RECENT PROGRESS ON THE KAKEYA CONJECTURE. Publicacions Matemàtiques, Barcelona. (2002).
- [Ne] Nelson, D. THE CANTOR SET – A BRIEF INTRODUCTION
- [Ta01] Tao, T. FROM ROTATING NEEDLES TO STABILITY OF WAVES: EMERGING CONNECTIONS BETWEEN COMBINATORICS, ANALYSIS, AND PDE, in Notices of the AMS 48, 3 (2001).
- [Math6] Tutorial del software científico Mathematica 6.0
- [Wo99] Wolf, T. RECENT WORK CONNECTED WITH THE KAKEYA PROBLEM, in Prospects in Mathematics, Amer. Math. Soc., Providence, págs.129–162 (1999).
- [Zi79] Zippel, R. PROBABILISTIC ALGORITHMS FOR SPARSE POLYNOMIALS. In *Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, págs. 216–226. Springer-Verlag,(1979).